# ガンマ函數の理論と應用

並びに

小數6位まで有效な複素變數のガンマ函數表

柴垣和三雄著

[解析數學叢書]

Danmarks Natur- og Lægevidenskabelige Bibliotek
Nørre Allé 49, DK 2200 København N.

200005259079

岩波書店

# THEORY AND APPLICATIONS OF THE GAMMA FUNCTION

WITH

A TABLE OF THE GAMMA FUNCTION
FOR COMPLEX ARGUMENTS
SIGNIFICANT TO THE SIXTH DECIMAL PLACE

BY

WASAO SIBAGAKI

Wasao Sibagaki

TOKYO

IWANAMI SYOTEN

1952

BIBLIOTHECA
REGIA
HAFNIENSIS

Universitetsbiblioteket
2. Afd. · København N.

# 序

周知のようにガンマ函數は應用解析において初等函數と同様によく使われる特殊函數である．特に最近では波動傳播や量子力學の問題で複素變數に對する値もしばしば要求されるようになった．これらの要求に應ずべく複素變數のガンマ函數の數値表作製のことが我々により文部省科學研究のテーマ「重要特殊函數の數値表作成」の一部としてとりあげられたのは昭和22年の始めであった．それ以來我々は戰後の乏しきに堪えて努力し，遅々たる歩みではあったが文部省科學研究費の援助によりようやく完成をみ，今日出版の運びに至ったのである．數値計算に協力された方々を時間的に順に記せば，田村孝子，永野一惠，既に亡き薗田純子，松村容子，堀園子，立田榮光，古田敬人，林健児，柴垣和夫，田代靜子，小野昭，古園裕已，石崎守美の諸君である．健康と生活とそれに數値計算に特有な重荷に壓されて幾度となく放棄の瀬戸際に押しやられながらついにここまで漕ぎつくことのできたのは，全く以上の年若い諸君の激勵的協力の賜といわねばならない．（表の説明には §33, §34, §35 を參照されたい．なお本書では $z$ の自然對數を $\ln z$ と表わし，常用對數を $\log z$ と記した）．

表の計算は一應完成したが，本表のようにその普及化が將來に期待されるような性質のものは我國ではなかなか出版困難である．それを畏友福原滿洲雄君の好意ある盡力により本叢書の一つとして出版されることになったのは思いもかけぬ喜びであった．ここに同君並びに心よく御了解いただいた吉田洋一先生及び敢えて出版を引受けられた岩波書店に對し深く敬意と謝意を表する次第である．

以上のようなわけで筆者は新たに「ガンマ函數の理論と應用」を書くことになった．既に邦書にも福原教授の「ガンマー函數」（弘文堂，昭和26年）があるが，本書では最初から，解析函數の見地からできるだけ詳細に初學者の疑點とするところを解明するように努力した．従って讀者には一應一般函數論初歩の知識を假定しているが，公式の證明にはできるだけ一般的な立場からということと同時に最も簡明であることを目標として適當な方法を選擇した．初等函數の説明に相當意を用い頁數を費したのもこのためで，本書が函數論の理解の深めにも役立てばと念願している．應用解析の立場からは，近代函數論の成果がこのような特殊函數の性質の探究につねに直結していることが望ましい．このことへの努力が特に我國に於ては貧困なのではあるまいか，この意味で相當努力したつもりであるが，著者の無力のため十分その意圖が達せられなかったのは殘念である．

ガンマ函數の物理數學への應用については本書では一切省略した．頁數が多くなることを恐れたためもあるが，全く別に計畫するのが適當と考えたからでもある．

本書を書くにあたり多くの文獻を參照したが，單行本としては

N. Nielsen, Handbuch der Theorie der Gammafunktion (1906).

E. T. Whittaker and G. N. Watson, A Course of Modern Analysis (1935),

P. E. Böhmer, Differenzengleichungen und Bestimmte Integrale (1939),

C. Carathéodory, Funktionentheorie Bd. I. (1950),

能代 清，函数論概説 I，II （本叢書）

等に負うところが甚だ多い．なお定差方程式の見地から論じたものには

G. Wallenberg, Die Theorie der linearen Differenzengleichungen (1911),

N. E. Nörlund, Die Differenzenrechnung (1924)

等があるが本書ではこの見地からの詳細な取扱はしなかった．

終りに計算に協力された前記の諸兄，大部の數表を見事に印書された古田敬人君，校正に協力された小野昭君及び校正その他にお骨折いただいた岩波書店根岸榮次君の勞に對し厚く感謝の意を表します．

昭和 27 年 8 月

福岡にて
柴垣和三雄

# 目　　次

序

第 1 章　初等函數 ………… 1

1. 指數函數 $e^z$ ………… 1
2. 三角函數 ………… 2
3. 双曲線函數 ………… 3
4. 實三角函數の週期 ………… 4
5. 指數函數および三角函數の週期 ………… 6
6. 對數函數 ………… 8
7. 級數展開と積分表示 ………… 11
8. 對數の計算と見積り ………… 13
9. $n!$ の見積り ………… 16
10. 級數 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{1+z}}$ の和 ………… 17
11. 函數 $\tan z$, $\tanh z$, $\cot z$, $\coth z$ ………… 18
12. $\pi$ の數値計算 ………… 21
13. $\pi\cot\pi z$ の部分分數分解 ………… 22
14. 整函數 $\sin\pi z$ の因數分解 ………… 26
15. 等角寫像に於ける特異點，交叉點 ………… 30
16. 有理型函數の弧立特異點 ………… 33
17. Riemann 面および等角寫像の例 ………… 37

第 2 章　ガンマ函數 ………… 44

18. 歴　史 ………… 44
19. Euler の第二種の積分 $\Gamma(z)$ の正則性 ………… 45
20. $\Gamma$ 函數の無限積表示 ………… 46
21. Euler の常數 ………… 49
22. ガンマ函數の基準積表示と主要公式 ………… 52
23. Hankel の積分表示 ………… 55
24. Gauss の $\Psi$ 函數 ………… 57
25. $\ln\Gamma(z)$ にたいする Binet の公式 ………… 60

26. $\Psi(z)$ および $\Gamma(z)$ の乗法定理 …… 65
27. Stirling の級數 …… 67
28. 續 き …… 72
29. 實ガンマ函數の理論 …… 75
30. $\Gamma(z)$ の漸近展開 …… 79
第 3 章 ガンマ函數の數値計算と等角寫像 …… 85
31. 實ガンマ函數の數値計算 …… 85
32. 實プサイ函數の數値計算, $\Psi(z)$ の零點 …… 87
33. 複素 $\Gamma$ 函數の數値計算 …… 91
34. 複素直坐標式補間法 …… 95
35. ガンマ函數による等角寫像 …… 99
第 4 章 ガンマ函數の應用 …… 105
36. ガンマ函數で表わされる積分 …… 105
37. 或る種の無限積の計算 …… 107
38. $\Re(\gamma-\alpha-\beta)>0$ のときの $F(\alpha, \beta; \gamma; 1)$ の値 …… 108
39. 第一種の Euler 積分またはベータ函數 …… 109
40. Pochhammer によるベータ函數の積分表示 …… 113
41. 超幾何函數の積分表示 …… 114
42. 超幾何函數の Barnes の積分表示 …… 115
附錄 I 解析函數系に關する收斂定理 …… 119
附錄 II Salzer の複素直坐標式補間法の係數表 …… 128
雜 題 …… 132
小數6位まで有效な複素變數のガンマ函數表 …… 135
公式集 …… 189
索 引 …… 199

# 第 1 章　初 等 函 數

## §1. 指數函數 $e^z$

ガンマ函數の定義式には指數函數が現われるから，まず指數函數の説明から始めるのが適當であろう．いま一階の線型齊次な最も簡單な微分方程式

$$\frac{dw}{dz}=w \tag{1.1}$$

を滿足する原點 $z=0$ の近傍で正則な函數

$$f(z)=a_0+a_1z+a_2z^2+a_3z^3+\cdots\cdot \tag{1.2}$$

を求めれば，これを項毎微分して

$$\frac{df}{dz}=a_1+2a_2z+3a_3z^2+\cdots\cdot$$

を得るから

$$a_0=a_1,\qquad a_1=2a_2,\qquad a_2=3a_3,\qquad \cdots\cdot$$

が成立たねばならない．これより

$$a_1=a_0,\qquad a_2=\frac{a_1}{2}=\frac{a_0}{2!},\qquad a_3=\frac{a_2}{3}=\frac{a_0}{3!},\qquad \cdots\cdot$$

よっていま級數

$$\exp z\equiv e^z=1+\frac{z}{1!}+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\cdots\cdot \tag{1.3}$$

によって**指數函數**を定義すれば (1.1) のすべての解は

$$w=a_0e^z \qquad (a_0 \text{ は任意常數})$$

によって與えられる．級數 (1.3) は $|z|<\infty$ で收斂するから函數 $e^z$ は**超越整函數**で，$z=\infty$ は眞性特異點である．函數 $e^z$ は方程式 (1.1) の初期條件 $z=0$ のとき $w=1$ となる解として特徴づけられるが，次にその性質を調べて見よう．

任意の點 $z_0$ に於て $f(z)=e^z$ の Taylor 展開

$$f(z_0+h)=f(z_0)+f'(z_0)h+\frac{f''(z_0)}{2!}h^2+\cdots\cdot$$

を考えれば，$f(z_0)=f'(z_0)=f''(z_0)=\cdots\cdot=e^{z_0}$ であるから

$$e^{z_0+h}=e^{z_0}\left(1+h+\frac{h^2}{2!}+\cdots\right)=e^{z_0}e^h$$

が成立つ．この關係

$$e^{z_1+z_2}=e^{z_1}e^{z_2} \tag{1.4}$$

はいわゆる**指數函數の加法定理**である．これに於て $z_1=z$, $z_2=-z$ とおけば

$$e^z e^{-z}=1. \tag{1.5}$$

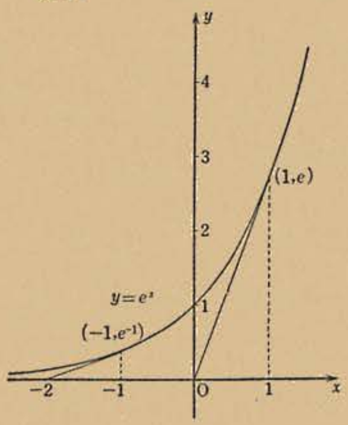
よって**指數函數は一つも零點をもたない函數である**．$z$ の多項式は必ず零點を有し超越整函數は多項式によって幾らでも精密に近似されるにかかわらずこのように零點をもたないものがあることは，"いかに大きな圓 $|z|<G$ をとっても十分大きな自然數 $N$ をとれば $n>N$ なる限り多項式

$$1+\frac{z}{1!}+\frac{z^2}{2!}+\cdots\cdots+\frac{z^n}{n!} \tag{1.6}$$

は圓 $|z|<G$ の中に一つも零點をもたない" こととして理解される．

冪級數展開 (1.3) は實係數であって，指數函數は**實なる解析函數**であるといわれる．即ちこのとき $z$ の實なる値 $x$ にたいしては函數は實數値の函數

$$y=e^x \tag{1.7}$$



第 1 圖

となり，$(x,y)$ 平面上圖のようなグラフをもつ．$|x|$ が小さいときは $e^x$ の値は級數 (1.3) によって速やかにいくらでも精密に算出される．例えば小數 10 位まで正確には $e\approx e'=2.71828\ 18285$ は

$$1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots\cdots+\frac{1}{14!} \tag{1.8}$$

で與えられる．しかし既に $x=2$ にたいしては級數の收斂は遅く $x=5$ になると級數は收斂して $e^5$ を表わすにかかわらず實用的にはもはや役立たない．この缺陥は加法定理 (1.4) を利用することによって補われる．

## §2.　三角函數

次に引數の複素數値 $z=x+iy$ にたいしてはまず加法定理により

$$e^z=e^x e^{iy} \tag{2.1}$$

が成立つが，ここに現われた式 $e^{iy}$ について考えよう．より一般的に

$$e^{iz}=1+i\frac{z}{1!}-\frac{z^2}{2!}-i\frac{z^3}{3!}+\frac{z^4}{4!}+i\frac{z^5}{5!}-\cdots\cdots \tag{2.2}$$

となるからいま

$$\cos z=1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}-\cdots\cdots \tag{2.3}$$

(2.4) $$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \cdots.$$

によって新たに**超越整函数** $\cos z$ および $\sin z$ を導入すれば

(2.5) $$e^{iz} = \cos z + i\sin z$$

と書かれる. $\cos z$, $\sin z$ はいずれも實で前者は偶函数, 後者は奇函数である. 卽ち

(2.6) $$\cos(-z) = \cos z, \qquad \sin(-z) = -\sin z.$$

また $$\cos 0 = 1, \qquad \sin 0 = 0.$$

(2.5) に於て $z$ のかわりに $-z$ とおけば

(2.7) $$e^{-iz} = \cos z - i\sin z.$$

これと (2.5) から $\cos z$, $\sin z$ を解けば **Euler の公式**

(2.8) $$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \qquad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

を得, これからすぐに

(2.9) $$\frac{d\cos z}{dz} = -\sin z, \qquad \frac{d\sin z}{dz} = \cos z$$

が導かれる. よって $\cos z$, $\sin z$ はいずれも二階線型齊次な微分方程式

(2.10) $$\frac{d^2w}{dz^2} = -w$$

の解で (2.10) のすべての解は一次結合

(2.11) $$w = c_1\cos z + c_2\sin z$$

によって與えられる. $\cos z$ 或は $\sin z$ はそれぞれ (2.10) の初期條件 $w(0)=1$, $w'(0)=0$ 或は $w(0)=0$, $w'(0)=1$ によって定められる解である.

$e^z$ のときと同様に $f(z) = \cos z$ または $\sin z$ の Taylor 展開式を考えれば, **三角函数の加法定理**

(2.12) $$\cos(z_1+z_2) = \cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2,$$

(2.13) $$\sin(z_1+z_2) = \sin z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2$$

の成立つことが示される. さらに (2.12) に於て $z_1 = z$, $z_2 = -z$ とおけば Pythagoras の恒等式

(2.14) $$\cos^2 z + \sin^2 z = 1$$

が從う.

## §3. 双曲線函数

$e^{iz}$ から (2.8) によって實なる偶函数, 奇函数が導入されたように, $e^z$ および $e^{-z}$ のかわりに

(3.1) $$\cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2} = 1 + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \cdots$$

(3.2) $$\sinh z=\frac{e^z-e^{-z}}{2}=z+\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}+\cdots$$

なる偶函數 $\cosh z$ および 奇函數 $\sinh z$ を導入して用いると便利である．これらは三角函數にたいし

(3.3) $$\cosh z=\cos iz,\qquad i\sinh z=\sin iz$$

なる關係をもつ．また

(3.4) $$\frac{d\cosh z}{dz}=\sinh z,\qquad \frac{d\sinh z}{dz}=\cosh z$$

が成立つから，これらはいずれも微分方程式

(3.5) $$\frac{d^2w}{dz^2}=w$$

の解でその一般解は

(3.6) $$w=c_1\cosh z+c_2\sinh z$$

で與えられる．また加法定理

(3.7) $$\cosh(z_1+z_2)=\cosh z_1\ \cosh z_2+\sinh z_1\ \sinh z_2,$$

(3.8) $$\sinh(z_1+z_2)=\sinh z_1\ \cosh z_2+\cosh z_1\ \sinh z_2$$

および恒等式

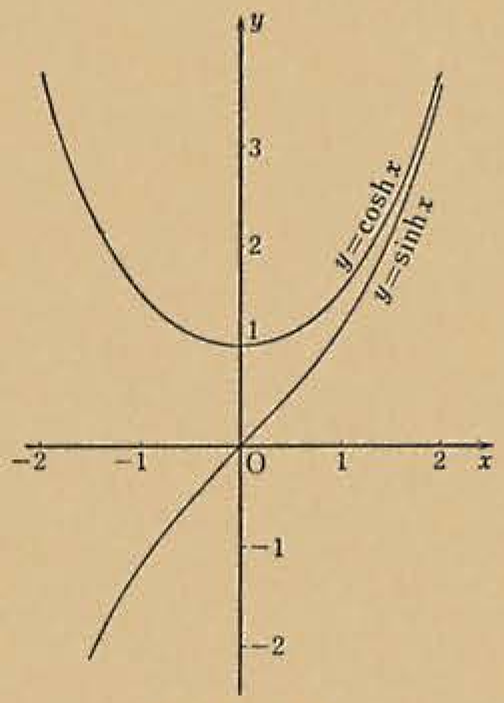
(3.9) $$\cosh^2 z-\sinh^2 z=1$$

の成立つことが示される．

$z$ の實數値 $x$ にたいしては

(3.10) $$y=\cosh x,\qquad y=\sinh x$$

のグラフはそれぞれ圖のようになる．これは指數函數のグラフからすぐに導かれる．しからば三角函數のグラフはいかになるか，それについて正確な模樣を知るにはその週期性を證明せねばならない．



第　2　圖

## §4. 實三角函數の週期

そのためまず**實變數の實なる函數 $\cos x$ が正の零點をもつこと**を證明しよう．かりにもたないとすれば，$x\geqq 0$ にたいし $\cos x>0$ でなければならないであろう．すると $\sin 0=0$, $(\sin x)'=\cos x>0$ から $\sin x$ は $x>0$ にたいし正の増加函數ということになる．いま $0<a<x$ とすると微分學の平均値定理により

(4.1) $$\begin{aligned}\cos x&=\cos a+(\cos\xi)'(x-a)\ ,\qquad (a<\xi<x)\\&=\cos a-\sin\xi\cdot(x-a)\\&<\cos a-\sin a\cdot(x-a)\ ,\qquad (\sin a>0)\end{aligned}$$

となり，この右邊は $x$ が大になれば負になるからここに矛盾が現われた．

$\cos x$ の正の零點の最小のものをしばらく $\dfrac{p}{2}$ と書こう．すると (2.14) から $\sin\dfrac{p}{2}=\pm1$ がでるが $+1$ でなければならないことは，**$\sin x$ と $\cos x$ の實の零點が互に分離しあう**ことから從う．この性質を證明するため，いま $x_1<x_2$ を $\sin x$ の二つの相隣る零點とすると

$$\sin x_1-\sin x_2=0=(\sin\xi)'\,(x_1-x_2), \tag{4.2}$$

$$\therefore\quad (\sin\xi)'=\cos\xi=0\ ,\qquad (x_1<\xi<x_2)$$

なる $\xi$ がある．そしてこのような $\xi$ は $(x_1, x_2)$ の內部にただ一つしかあり得ない（このことが上の性質である）．もし二つ以上あるとして $\xi_1<\xi_2$ をその相隣るものとすると上と同樣にして $\xi_1<x_3<\xi_2$ なる $\sin x$ の零點 $x_3$ がなければならない．これは假定に反する．

さて $x=0$ は $\cos x$ の相隣る零點 $-\dfrac{p}{2}$, $\dfrac{p}{2}$ の間の $\sin x$ の零點で 0 の近くの正なる $x$ にたいしては $\sin x>0$ であるから $x=\dfrac{p}{2}$ に於て $\sin x$ は正でなければならない．かくて $\sin\dfrac{p}{2}=1$ が證せられた．

以上のことからいまや多くの恒等式が得られる．加法定理から $\cos\dfrac{p}{2}=0$, $\sin\dfrac{p}{2}=1$ を用いてまず

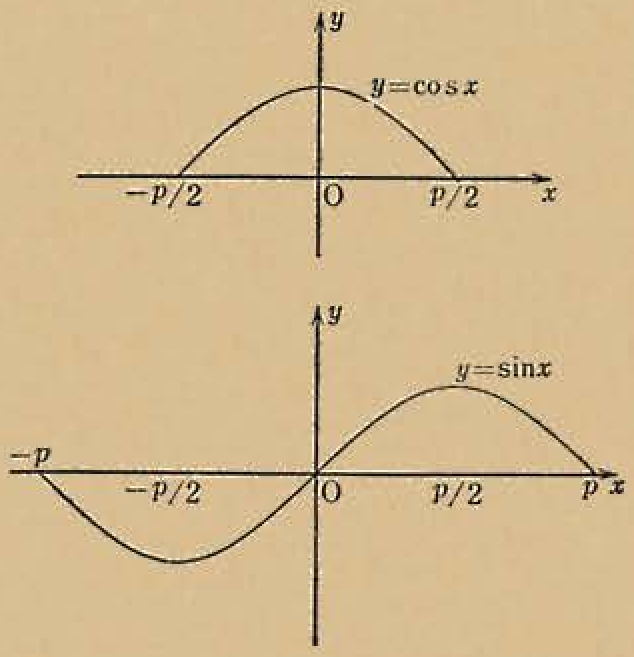
$$\sin\left(x+\frac{p}{2}\right)=\cos x,\qquad \cos\left(x+\frac{p}{2}\right)=-\sin x. \tag{4.3}$$

次にこれからただちに

$$\sin(x+p)=\cos\left(x+\frac{p}{2}\right)=-\sin x,\qquad \cos(x+p)=-\cos x. \tag{4.4}$$

さらに

$$\begin{aligned}\sin(x+2p)&=\sin x,\\ \cos(x+2p)&=\cos x.\end{aligned} \tag{4.5}$$




第　3　圖

この最後の關係は $\sin x$, $\cos x$ がいずれも $2p$ を週期とする**週期函數**なることを示す．$2p$ より小さい週期がないことはグラフを考えれば明らかである．

以上で函數の性質は明らかになったが，これらの數表が與えられれば應用力が最大限に發揮されるであろう．ところで以上の函數は直角三角形に關して古くから導入され十分精密な數表も作られた三角函數と同一物であることが示される．弧度 $x$ の三角函數は通常單位圓 $\xi^2+\eta^2=1$ に關し

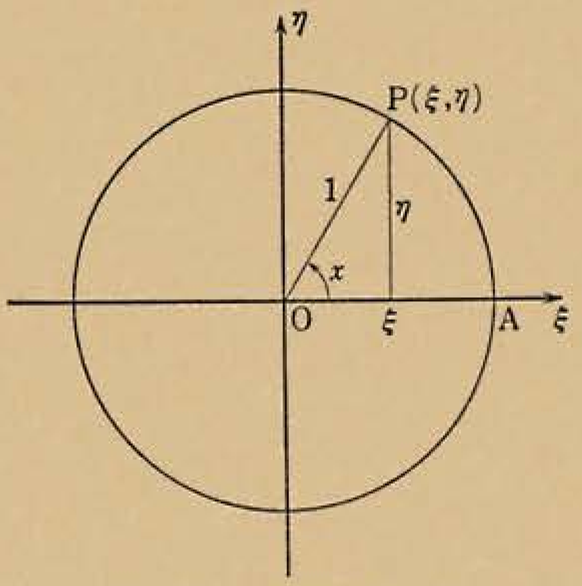
$$\xi=\cos x,\qquad \eta=\sin x \tag{4.6}$$

として定義される．これは見方をかえれば $0\leqq x\leqq 2\pi$ とするとき (4.6) が單位圓の媒變數表示なることを意味する．いま混同しないように §2 に於て (2.3), (2.4) によって導入された函數をかりに $C(x)$,

$S(x)$ と記せば上と同じ意味で

(4.7)　　$\xi=C(x),\quad \eta=S(x)$

が單位圓の媒變數表示なることが示される．(4.7) で與えられる點 $(\xi,\eta)$ が單位圓周上の點なることは性質 (2.14) である．よって逆に單位圓周上の任意の一點 $(\xi,\eta)$ にたいし一週期內のただ一つの $x$ の値が對應することを示せばよい．見易いように一週期の區間を $-p\leqq x<p$ とするとまず $-1<\xi<1$ なる $\xi$ にたいしては $\xi=C(x)$ をみたす $x$ は $x_1$ と $-x_1$ と二つあるが，$S(-x_1)=-S(x_1)\neq 0$ であるからこの二つの中のいずれか一方のみが與えられた關係 $\eta=S(x)$ をみたす．次に $\xi=1$ または $\xi=-1$ のときは明らかである．



第4圖　三角函數の定義

いま點 $A$ (1,0) から反時針の向きに測った圓弧の長さを $s$ とすれば (4.7) から

$$ds^2=d\xi^2+d\eta^2=[C'(x)^2+S'(x)^2]dx^2=[S(x)^2+C(x)^2]dx^2$$
$$=dx^2.$$

故に $ds=dx$ である．$x=0$ のとき $s=0$ であるからこれより

$$s=x$$

が從う．即ち媒變數表示 (4.7) に於ける $x$ が (4.6) に於けると同様に單位圓の中心角の弧度に等しいことが示された．かくて (4.6), (4.7) から目標の關係

(4.8)　　$\xi=C(x)=\cos x,\quad \eta=S(x)=\sin x$

が從う．同時に前に導入された週期 $2p$ が $2\pi$ に等しいことが判明したわけである．

## §5. 指數函數および三角函數の週期

以上で實三角函數が週期的で $2\pi$ を週期とすることがわかったが，三角函數 $\cos z$, $\sin z$ が $2\pi$ の整數倍以外に週期をもたないことを示すため，まず指數函數 $e^z$ の週期について考えよう．

$z=x+iy$ にたいし

(5.1)　　$w=e^z=e^{x+iy}=e^x(\cos y+i\sin y).$

これは $e^z$ の實數部虛數部への分解である．この式で $x=0$, $y=2\pi$ とおけば

(5.2)　　$e^{2\pi i}=1$

がでる．いま一般に $\omega=x+iy$ を方程式

(5.3)　　$e^{\omega}=e^x(\cos y+i\sin y)=1$

の任意の根とすると

$$e^x\cos y=1,\qquad e^x\sin y=0$$

でなければならないが，これより

$$e^{2x}=(e^x\cos y)^2+(e^x\sin y)^2=1.$$

よって

$$x=0,\qquad \cos y=1,\qquad \sin y=0$$

が從う．ところで $y$ は實數だからこれをみたす $y$ は $y=2k\pi$ $(k=0,\pm1,\pm2,\cdots\cdot)$ 以外になく，よって (5.3) の解は $\omega=2k\pi i$ $(k=0,\pm1,\pm2,\cdots\cdot)$ に限ることがわかる．

一方 $\omega$ を (5.3) の解とすれば任意の $z$ にたいし關係

$$e^{z+\omega}=e^ze^\omega=e^z \tag{5.4}$$

が成立ち，逆に $z$ の任意の一つの値にたいしこの關係が成立てば $e^\omega=1$, 從って $\omega=2k\pi i$ でなければならない．よって指數函數 $w=e^z$ は週期函數でそのすべての週期は $\omega_0=2\pi i$ の整數倍である．$\omega_0$ を $e^z$ の**基本週期**という．いま一つの基本週期は $\varpi_0=-2\pi i$ である．

次に三角函數について考えよう．$z=x+iy$ とすれば

$$\begin{aligned}\cos z&=\cos x\cos iy-\sin x\sin iy\\&=\cos x\cosh y-i\sin x\sinh y.\end{aligned} \tag{5.5}$$

同樣にして

$$\sin z=\sin x\cosh y+i\cos x\sinh y. \tag{5.6}$$

以上は $\cos z$ および $\sin z$ の實數部虛數部への分解である．(5.5) から

$$\begin{aligned}|\cos z|^2&=\cos^2x\cosh^2y+\sin^2x\sinh^2y\\&=\cos^2x(1+\sinh^2y)+\sin^2x\sinh^2y\\&=\cos^2x+\sinh^2y=\cosh^2y-\sin^2x.\end{aligned} \tag{5.7}$$

$$|\sin z|^2=\sin^2x+\sinh^2y=\cosh^2y-\cos^2x. \tag{5.8}$$

これらの式より $\cos z$ および $\sin z$ が實零點のみをもつことおよび $\sin z$ の零點が $z=k\pi$, $\cos z$ の零點が $z=(2k+1)\pi/2$ (但し $k$ は整數) の形であることがわかる．

いま $\omega$ を $\sin z$ の任意の週期とすると $\sin(z+\omega)=\sin z$ で $z=0$ にたいして $\sin\omega=0$ となるから，これより $\sin z$ のすべての週期は實で基本週期は $\pm2\pi$ であること，また $\cos z=\sin\left(\frac{\pi}{2}-z\right)$ であるから $\cos z$ の週期も同樣であることがわかる．

**問題 1.** $z=2-3i$ にたいする函數

$$e^z,\qquad \cos z,\qquad \sin z$$

の値を求めよ．

**問題 2.** 上の各値の絕對値および偏角をだせ．[1)]

---

1) これらの數値計算には拙著：0.01% 初等函數表 (昭和27年) 共立出版株式會社を用いると便利である

**問題 3.** 上の $z$ および各値を表わす點を方眼紙上にとれ.

## §6. 對數函數

ガンマ函數の逆函數を後に考えるのであるが，ここにまず指數函數の逆函數を考えておこう．與えられた $w$ にたいし方程式

$$w=e^z \tag{6.1}$$

を滿たす $z$ を考えるに，$z$ が解であれば任意の整數 $k$ にたいし $z+2k\pi i$ も解である．かくて關係 (6.1) により指數函數の逆函數として一つの**無限多價函數**が定義される．これを $w$ の**對數函數**といい

$$z=\ln w \tag{6.2}$$

と記す．$z$ の多價性をもっと明瞭にするため直形式で $w=u+iv$ とすると方程式 (6.1) は

$$e^x\cos y=u,\qquad e^x\sin y=v$$

となるが，これは

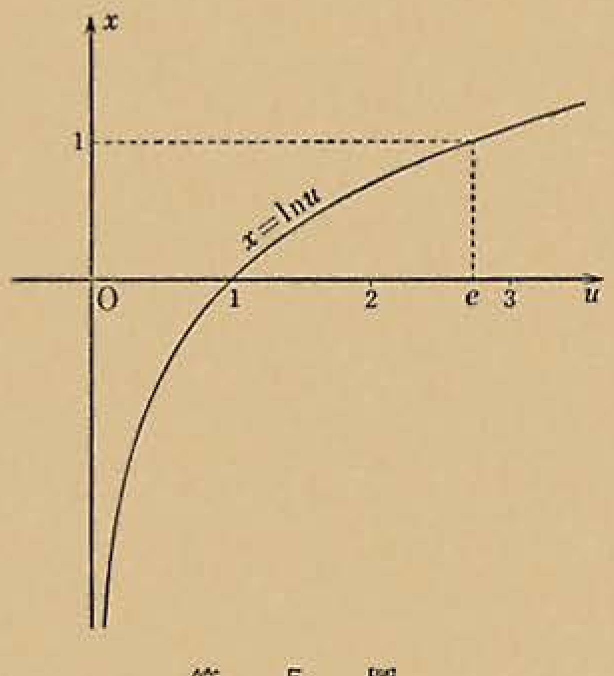
$$e^x=\sqrt{u^2+v^2},\qquad \cos y=\frac{u}{\sqrt{u^2+v^2}},\qquad \sin y=\frac{v}{\sqrt{u^2+v^2}} \tag{6.3}$$

と同値である．よって $u,v$ が同時に 0 即ち $w=0$ の場合を除けば，任意の $w$ にたいしまず第1式から $x$ が確定し，次にあとの 2 式よりまず帶片

$$-\pi\leqq y<\pi \tag{6.4}$$

內にただ一つの $y$ の値がきまって，この $y$ にたいし一般に $y+2k\pi$ も解であることがわかる．よって 0 でない $w$ にたいしては方程式 (6.1) には (6.4) なる帶片內にただ一つの解 $z$ がありこれと同時に $z+2k\pi i\,(k=\pm1,\pm2,\cdots\cdots)$ もまた解である．(6.4) なる帶片內の値を對數函數 $z=\ln w$ の主値とよぶ．

特に $w$ が正實數 $u$ のときは (6.3) は



第　5　圖

$$e^x=u,\quad \cos y=1,\quad \sin y=0 \tag{6.5}$$

となるから，帶片 (6.4) 內では $y=0$ だけが解で，したがって主値は實函數

$$z=x=\ln u,\quad u>0 \tag{6.6}$$

である．これは容易にためされるように

$$\frac{d\ln u}{du}=\frac{1}{u},\quad \ln 1=0,\quad \ln e=1,$$

$$\ln u_1+\ln u_2=\ln u_1u_2, \tag{6.6'}$$

$$\ln\frac{1}{u}=-\ln u$$

なる性質をもつ．

そこで再び複素 $w$ にもどって上に述べた $\ln w$ の多價性をもっと精密に考えて見よう．そのため

$w$ の値を $w=\rho e^{i\varphi}$ のように極形式で表わすと $e^x=\rho$, $y=\varphi$ となるから (6.2) は

$$z=x+iy=\ln\rho+i\varphi \quad (\rho>0) \tag{6.7}$$

を與える．いま $w$ 平面を實軸に沿うて二つの半平面に切斷し上半平面を領域 $T'$ : $0<\varphi<\pi$, 下半平面を領域 $T''$ : $-\pi<\varphi<0$ とすれば，(6.7) によって $T', T''$ はそれぞれ $z$ 平面上の領域 $\Delta'$ :

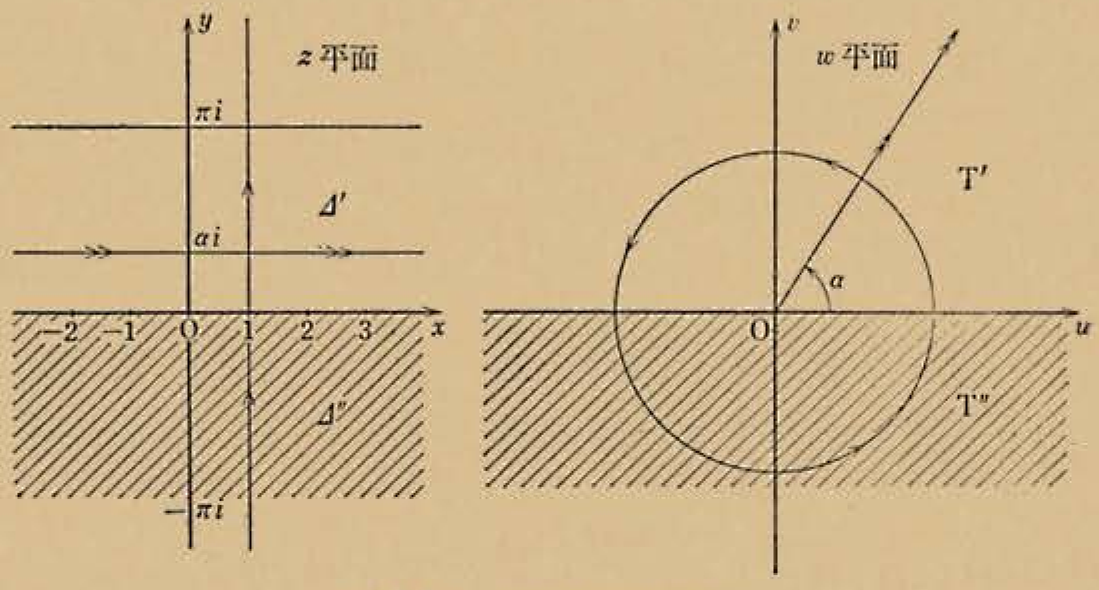
$$-\infty<x<\infty, \qquad 0<y<\pi$$

および領域 $\Delta''$ :

$$-\infty<x<\infty, \qquad -\pi<y<0$$

に一對一且つ等角に寫像される(影づけない $T'$ と $\Delta'$, 影づけた $T''$ と $\Delta''$ がそれぞれ對應する).

さらに (6.7) によって $w$ 平面の正實軸 $\varphi=0$, $\rho>0$ は $z$ 平面の實軸全體 $-\infty<x<\infty$, $y=0$ に，一般に任意の射線 $\varphi=\alpha$ $(-\pi<\alpha<\pi)$, $\rho>0$ は $x$-平行線 $y=\alpha$ に寫像される．これらの射線に直交する圓 $\rho=\rho_0$, $-\pi\leqq\varphi\leqq\pi$ は以上の $x$-平行線に直交する $y$-平行線分 $x=\ln\rho_0$, $-\pi\leqq y\leqq\pi$ に，特に單位圓 $\rho=1$ は虛軸上の線分に寫像される．



第 6 圖　$w=e^z$ 逆に $z=\ln w$

よっていま二つの半平面 $T'$ と $T''$ とを正實軸に沿うて再びつなげば，かくして得られる領域 $T$: $-\pi<\varphi<\pi$, $\rho>0$ はいまみたように寫像 (6.2) $z=\ln w$ によって一對一連續且つ等角に $z$ 平面の帶片

$$-\infty<x<\infty, \qquad -\pi<y<\pi \tag{6.8}$$

に寫像されることがわかる．したがって對數函數 (6.7) のとる値の中で帶片 (6.8) の中にあるものだけを集めて考えればその全體は領域 $T$ に於て定義される一つの正則函數を作る．これは無限多價な $\ln w$ の一つの一價な分枝で特に主値とよんでいるものである．この函數の變動を見るには帶片 (6.8) を同じ幅の多數の例えば12個の細帶片にわかち一方 $y$ 軸を中心にして左右に例えばこれと同じ間隔をおいて並ぶ線分を多數ひいてこれらからできる網目が $w$ 平面のいかなる網目に對應するかをみるとよい (實際作って見られたい). $y$ 軸の右の最初の線分では

$$x_1=\ln\rho_1=\frac{2\pi}{12}=0.5236, \qquad \therefore\ \rho_1=1.6881.$$

以下順次

$$x_n=\ln\rho_n=0.5236n, \qquad \rho_n=e^{0.5236n},$$

$$n=0,\pm 1,\pm 2,\cdots\cdots$$

となる．$x_n$ は等差數列，$\rho_n$ は等比數列をつくる．單位圓 $|w|=1$ の内部には帶片の虚軸から左の部分，外部には虚軸から右の部分が對應する．

しかしもし領域 $T$ ($w$ 平面から原點および負實軸を除いた點集合) を $\pi<\varphi<3\pi$, $\rho>0$ とするならば (6.7) は函數 $z=\ln w$ の第二の**分枝**を與えるであろう．この分枝は領域 $T$ を $z$ 平面の

(6.9) $$-\infty<x<\infty, \qquad \pi<y<3\pi$$

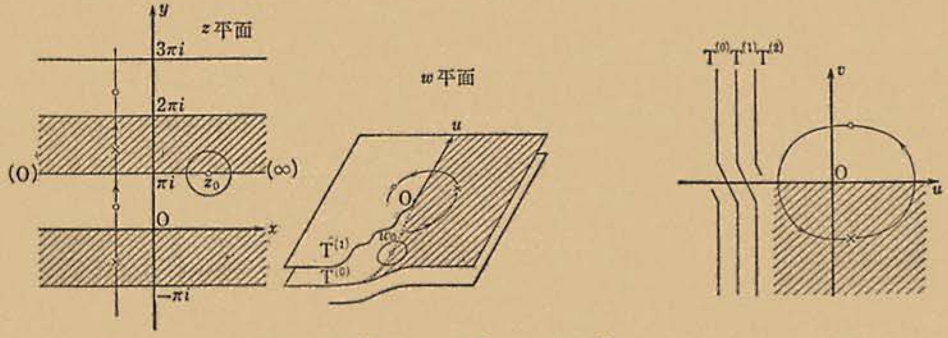
なる帶片に寫像する．順次このように考えてゆけば $\varphi$ が

(6.10) $$(2k-1)\pi<\varphi<(2k+1)\pi$$

を動くとき (6.7) は函數 $z=\ln w$ の第 $k$ 分枝を與えることになり，かくして無限多價函數 $z=\ln w$ のすべての値が $k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots\cdots$ とすることによって得られることがわかる．

$z$ 平面では函數 $z=\ln w$ の値は重なり合わない無數に多くの帶片の上に分布している．これに反し $w$ 平面では同じ領域 $T$ が繰り返し異る分枝に使われる．これを區別することは，各分枝にそれぞれ一つの合同な領域 $T=\cdots\cdots, T^{(-2)}, T^{(-1)}, T^{(0)}, T^{(1)}, T^{(2)}, \cdots\cdots$ を用意しこれらが基礎の $w$ 平面上にあたかも書物の紙片のように積み重なっているとして一應打開できるであろうが，問題は $z$ 平面の各帶片が連續的に連結されているのに相當してこれらを如何につなげばよいかということであろう．

これを考えるため例えば二つの分枝 $-\pi<\varphi<\pi$ と $\pi<\varphi<3\pi$ およびおのおのに對應する領域 $T^{(0)}$ と $T^{(1)}$ を考えてみる．$T^{(0)}$ の像である $z$ 平面の帶片の上の側の境界と $T^{(1)}$ の像である $z$ 平面の帶片の下の側の境界とは同じで，したがって點 $z_0=x_0+\pi i$ の近傍は點 $w_0=e^{z_0}=-e^{x_0}$ の近傍に一對一且つ等角に寫像される．よって負實軸に沿うて $T^{(0)}$ の上岸を $T^{(1)}$ の下岸につないで $T^{(0)}$ から滑かに $T^{(1)}$ に移るようにするのが自然である．




第 7 圖

同様なつなぎ方を他の相隣る帶片に對應する領域 $T^{(k)}$, $T^{(k+1)}$ に施せば，$w$平面上にひろがる $w=0$ を渦心とする渦狀の無限葉からなる一つの表面が得られるであろう．これを $w=e^z$ **による $z$ 平面の一對一の像である Riemann 面**または**逆函數 $z=\ln w$ の變域である Riemann 面**という．この

表面の上では $\ln w$ は一價函數となる.

渦心 $w=0$ および (Riemann 球面で考えれば容易に納得できるように) $w=\infty$ は**對數分岐點**とよばれる特異點である (§16 參照).

いま例えば $T^{(0)}$ の一點 $w_0$ から出發して $w=0$ のまわりを正の向きにまわれば次々に $T^{(1)}, T^{(2)}$, $\cdots\cdot$ を經めぐるが, この Riemann 面の連結狀態或は構造はこれと一對一の對應にある $z$ 平面の分割をみれば明瞭にうかがうことができる. 二つの對數分岐點 $w=0, \infty$ を結ぶところの實軸に沿うて切斷することによって得られる半平面 $T', T''$ に對應する $z$ 平面の領域 $\varDelta', \varDelta''$ をそれぞれ $w=e^z$ の一つの**半基本領域**, そして $T', T''$ を正實軸に沿うてつないで得られる領域 $T$ に對應する $z$ 平面上の帶片を $w=e^z$ の一つの**基本領域**という. いますべての半基本領域 $\varDelta'$ および $\varDelta''$ の內部に ($w$ 平面の上半平面, 下半平面に對應して) それぞれ一點 ○ および × をとりこれを圖のように相隣る $\varDelta', \varDelta''$ の共通の邊と交わる線分で結ぶ. かくして得られるいわゆる**線狀複體**は $z$ 平面を二つにわかち一方の領域は對數分岐點 0 に, 他方の領域は對數分岐點 $\infty$ に對應する. そして線狀複體を上へ上へとたどることは Riemann 面を原點 $w=0$ のまわりに正の向きに經めぐることに相當する.

以上で無限多價函數である對數函數 $z=\ln w$ の變動が十分明らかにされたであろう.

## §7. 級數展開と積分表示

いま關係

$$w=e^z \tag{7.1}$$

をみたす一組の値 $w_0, z_0$ にたいし

$$w=e^{z_0}e^{z-z_0}=w_0+w_0\frac{z-z_0}{1!}+w_0\frac{(z-z_0)^2}{2!}+\cdots\cdot \tag{7.2}$$

なる**要素**を考えれば, $(dw/dz)_{z_0}=w_0\neq 0$ であるから, これのただ一つの**逆要素**が存在する. それを求めるには (7.1) を微分して

$$1=e^z\frac{dz}{dw}=w\frac{dz}{dw}$$

と書く. そうすると

$$\begin{aligned}\frac{dz}{dw}&=\frac{1}{w}=\frac{1}{w_0+(w-w_0)}\\&=\frac{1}{w_0}-\frac{w-w_0}{w_0^2}+\frac{(w-w_0)^2}{w_0^3}-\cdots\cdot\end{aligned} \tag{7.3}$$

を得, これを項毎積分することによって求むる

$$z-z_0=\frac{w-w_0}{w_0}-\frac{(w-w_0)^2}{2w_0^2}+\frac{(w-w_0)^3}{3w_0^3}-\cdots\cdot \tag{7.4}$$

が得られる. この冪級數は點 $w_0$ を中心とし原點を過る圓

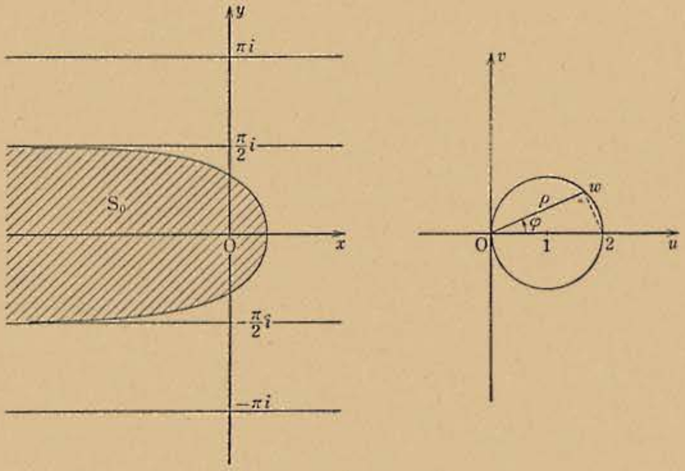
(7.5)
$$|w-w_0|=|w_0|$$
の內部で收斂する．先に述べた如く原點 $w=0$ は函數 $z=\ln w$ の特異點なわけである．$z_0$ をこの多價函數の一つの分枝の一つの値とすれば (7.4) で與えられる $z$ の値はこの分枝に屬する値である．例えば $z_0=0$, $w_0=1$ とすれば

(7.6)
$$z=(w-1)-\frac{(w-1)^2}{2}+\frac{(w-1)^3}{3}-\cdots\qquad(|w-1|<1)$$
は函數 $\ln w$ の領域 $|w-1|<1$ に於ける主値を表わす．

いまこの圓 $|w-1|<1$ の內部が (7.6) によって $z$ 平面のいかなる領域に寫像されるかを考えてみよう．圓の周圍は極坐標で $\rho=2\cos\varphi$ で $z=x+iy$ にたいし

(7.7)
$$w=\rho e^{i\varphi}=2\cos\varphi\cdot e^{i\varphi}=e^z=e^xe^{iy}$$
が成立つから圓の像の方程式は

(7.8)
$$e^x=2\cos y$$
となる．よって (7.6) によって圓 $|w-1|<1$ の內部は圖の影づけた領域 $S_0$ に一對一に寫像される．一般に (7.4) は圓 (7.5) の內部を點 $z=0$ を點 $z=z_0$ に移す平行移動によって $S_0$ から得られる領域 $S$ に寫像する．



第　8　圖

したがっていま $w_0$ を正無限大に増大すれば領域 $S$ は帶片 $-\frac{\pi}{2}<y<\frac{\pi}{2}$ の內部に於て次第に右方に擴大し，遂に右半平面 $\Re w>0$ が帶片 $-\frac{\pi}{2}<y<\frac{\pi}{2}$ の全體に一對一に寫像されることがわかる．

(7.3) により對數 $z=\ln w$ の主値は

(7.9)
$$\frac{d\ln w}{dw}=\frac{1}{w},\qquad \ln 1=0$$
によって完全に決定される．このことを用いて領域 $\Re w>0$ に於ける $\ln w$ の主値が定積分

(7.10)
$$\ln w=\int_0^\infty\frac{e^{-t}-e^{-wt}}{t}dt,\qquad(\Re w>0)$$
によって表わされることを示そう．

まず積分の收斂については，被積分函數が下端では $w-1$ となることから，上端では $\Re w>0$ の假定のため指數的に 0 となることから明らかである．かくして右邊の積分で定義される $w$ の函數を

$F(w)$ とすれば，微分は積分記號下で行うことが出來て，

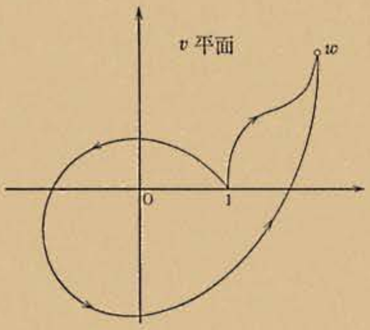
$$\frac{dF(w)}{dw}=\int_0^{\infty}e^{-wt}dt=\frac{1}{w}.$$

また $w=1$ にたいして積分は恒等的に 0 となるから $F(1)=0$. よって (7.9) がすべて滿足され，$F(w)\equiv\ln w$ $(\Re w>0)$ でなければならない.

なお無限多價函數 $z=\ln w$ は複素積分として

$$\ln w=\int_1^w\frac{dv}{v} \tag{7.11}$$

と表される. $w\in T^{(0)}$, 即ち $-\pi<\arc w<\pi$ と制限すれば右邊の積分はそこで $w$ の一價正則函數を定義する. これは即ち $\ln w$ の主値に他ならない. その値は點 1 から點 $w$ まで直線路 $C^{(0)}$ に沿うて積分して求められる. もし Riemann 面上で $w\in T^{(k)}$, 換言すれば $(2k-1)\pi<\arc w<(2k+1)\pi$ とすれば，




第　9　圖

これは點 1 から出發して原點のまわりを $k$ 回めぐってから點 $w$ に行く路 $C^{(k)}$ に沿うての積分を意味し，原點のまわりを正の向きに一回めぐる路 $\Gamma$ については留數の計算により

$$\int_{\Gamma}\frac{dv}{v}=2\pi i \tag{7.12}$$

であるから

$$\ln w=\int_{1\,(C^{(k)})}^{w}\frac{dv}{v}=k\int_{\Gamma}\frac{dv}{v}+\int_{1\,(C^{(0)})}^{w}\frac{dv}{v}$$

$$=\ln w \text{ の主値}+2k\pi i$$

として第 $k$ 分枝が生ずる.

## §8. 對數の計算と見積り

指數函數の加法定理により

$$w_1=e^{z_1},\qquad w_2=e^{z_2},\qquad w_1w_2=e^{z_1+z_2}$$

が同時に成立つゆえ關係

$$z_1=\ln w_1,\qquad z_2=\ln w_2,\qquad z_1+z_2=\ln w_1w_2$$

がしたがい，したがって關係

$$\ln w_1+\ln w_2=\ln w_1w_2 \tag{8.1}$$

が成立つ. しかし對數函數は多價函數であるから，この關係は，$\ln w_1$ の無限個の値の任意の一つと $\ln w_2$ の無限個の値の任意の一つとの和に等しい値が $\ln w_1w_2$ の無限個の値の中にあること，また逆に $\ln w_1w_2$ の任意の値が $\ln w_1$ および $\ln w_2$ の適當な値の和として表わされることを意味するもの

で，したがって一般には $\ln w_1w_2$ の主値が $\ln w_1$ の主値と $\ln w_2$ の主値との和に等しいことにはならない．このような相等關係は $\mathrm{arc}\, w_1$ と $\mathrm{arc}\, w_2$ との和卽ち $\mathrm{arc}\, w_1w_2$ が $-\pi$ と $\pi$ の間にあるときに限って成立つのである．よって特別に $w_1, w_2$ が正實數であるときにはこの相等關係は常に成立する ((6.6)′ 式).

(7.6) から $|w|<1$ にたいする $\ln(1+w)$ の主値を與える式として

(8.2) $$\ln(1+w)=w-\frac{w^2}{2}+\frac{w^3}{3}-\cdots\cdots$$

が得られるが，同じ $w$ にたいし $\ln(1-w)$ の主値は

(8.3) $$\ln(1-w)=-w-\frac{w^2}{2}-\frac{w^3}{2}-\cdots\cdots$$

によって與えられる．ところで一次變換

(8.4) $$x=\frac{1+w}{1-w}$$

によって單位圓の內部 $|w|<1$ は右半平面 $\Re x>0$ に寫像されるから $\mathrm{arc}\, x$ は $-\frac{\pi}{2}$ と $\frac{\pi}{2}$ の間にある[1]．よって $|w|<1$ にたいし

(8.5) $$\ln\frac{1+w}{1-w}=2\left(w+\frac{w^3}{3}+\frac{w^5}{5}+\cdots\cdots\right)$$

は左邊の對數の主値を與える．換言すれば

(8.6) $$\ln x=2\left(\frac{x-1}{x+1}+\frac{1}{3}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^3+\frac{1}{5}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^5+\cdots\cdots\right)$$

は $\Re x>0$ なる $x$ にたいし $\ln x$ の主値を與える．さらに

(8.7) $$x=1+\frac{1}{y},\qquad \frac{x-1}{x+1}=\frac{1}{2y+1}$$

とおくと (8.6) は

(8.8) $$\ln\left(1+\frac{1}{y}\right)=2\left(\frac{1}{2y+1}+\frac{1}{3}\frac{1}{(2y+1)^3}+\frac{1}{5}\frac{1}{(2y+1)^5}+\cdots\cdots\right)$$

となる．これは $y$ が中心 $-\frac{1}{2}$，半徑 $\frac{1}{2}$ なる圓の外にあるとき左邊の對數の主値を表わす．

級數 (8.6) は對數表の作製に用いられる．卽ちいま $a, b$ を正數として $x=b/a$ とおけば

(8.9) $$\ln b-\ln a=2\left(\frac{b-a}{b+a}+\frac{1}{3}\left(\frac{b-a}{b+a}\right)^3+\frac{1}{5}\left(\frac{b-a}{b+a}\right)^5+\cdots\cdots\right).$$

$b=2$, $a=1$ とおけば

---

1) $\mathrm{arc}\,(1+w)$, $\mathrm{arc}\,(1-w)$ はおのおの $-\frac{\pi}{2}$ と $\frac{\pi}{2}$ の間にあるが，$\mathrm{arc}\, x=\mathrm{arc}\,(1+w)-\mathrm{arc}\,(1-w)$ が $-\frac{\pi}{2}$ と $\frac{\pi}{2}$ の間にあることは變換 (8.4) のいま述べた性質から明らかになる．

$$\ln 2=\frac{2}{3}+\frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^3+\frac{2}{5}\left(\frac{1}{3}\right)^5+\cdots\cdot$$

$$=0.69314\ 71805\cdots\cdot$$

また $b=128=2^7$, $a=125=5^3$ とおけば

$$7\ln 2-3\ln 5=\frac{2\cdot 3}{253}+\frac{2}{3}\left(\frac{3}{253}\right)^3+\frac{2}{5}\left(\frac{3}{253}\right)^5+\cdots\cdot$$

これより $\ln 5$ が計算できる．$\ln 3$ 又は $\ln 7$ を定めるには $b=81=3^4$ 又は $b=2401=7^4$, そして $a=b-1$ にとる．すると

$$4\ln 3-4\ln 2-\ln 5=\frac{2}{161}+\frac{2}{3}\left(\frac{1}{161}\right)^3+\cdots\cdot,$$

$$4\ln 7-5\ln 2-\ln 3-2\ln 5=\frac{2}{4801}+\frac{2}{3}\left(\frac{1}{4801}\right)^3+\cdots\cdot.$$

他の素數についても同様に進む．對數表の計算には素數の對數が精密に決定されればよいわけで他の數の對數は簡單な加算でだせる．

また自然對數 $\ln a$ はそれに模數 (Modulus)

$$M=\frac{1}{\ln 10}=0.43429\cdots\cdot$$

をかけることにより常用對數 $\log a$ に變えられる．

級數の剩餘は次のように簡單に見積られる．(8.2) より

$$(8.10)\qquad \begin{cases} |\ln(1+w)-w|\leqq\dfrac{|w^2|}{2}+\dfrac{|w^3|}{3}+\cdots\cdot \\[2mm] \qquad\leqq\dfrac{|w^2|}{2}(1+|w|+|w|^2+\cdots\cdot) \\[2mm] \qquad\leqq\dfrac{|w^2|}{2(1-|w|)}. \end{cases}$$

$w$ が正實數 $x$ のときは再び (8.2) より

$$(8.11)\qquad x-\frac{x^2}{2}<\ln(1+x)<x,\qquad (0<x\leqq 1).$$

この式で $x=1/y$ とおけば

$$(8.12)\qquad \frac{1}{y}-\frac{1}{2y^2}<\ln\left(1+\frac{1}{y}\right)<\frac{1}{y},\qquad (y\geqq 1).$$

ところで恒等的に

$$\frac{1}{y}-\frac{1}{2y^2}=\frac{1}{y+1}+\frac{y-1}{2y^2(y+1)}$$

であるから (8.12) をより簡單な關係

(8.13)
$$\frac{1}{y+1}<\ln\left(1+\frac{1}{y}\right)<\frac{1}{y}, \qquad (y\geqq 1)$$

でおきかえることができる．

さらに (8.8) ははるかに精密な見積りを与える．即ち $y>0$ にたいし

$$\frac{1}{3}\frac{1}{(2y+1)^2}+\frac{1}{5}\frac{1}{(2y+1)^4}+\cdots<\frac{1}{3}\frac{1}{(2y+1)^2}\left(1+\frac{1}{(2y+1)^2}+\frac{1}{(2y+1)^4}+\cdots\right)$$
$$=\frac{1}{3[(2y+1)^2-1]}=\frac{1}{12y(y+1)}=\frac{1}{12y}-\frac{1}{12(y+1)}$$

が成立つからこれを (8.8) と比較して

(8.14)
$$\frac{1}{y+\dfrac{1}{2}}<\ln\left(1+\frac{1}{y}\right)<\frac{1}{y+\dfrac{1}{2}}\left(1+\frac{1}{12y}-\frac{1}{12(y+1)}\right), \qquad (y\geqq 1).$$

### §9. $n\,!$ の見積り

$n\,!$ の精密な見積りについては後に述べるが，ここに (8.14) からただちに導かれる一つの見積りを示そう．まず (8.14) を

$$1<\ln\left(1+\frac{1}{y}\right)^{y+\frac{1}{2}}<1+\frac{1}{12y}-\frac{1}{12(y+1)}$$

の形に書けばただちに

(9.1)
$$e^{-\left(\frac{1}{12y}-\frac{1}{12(y+1)}\right)}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{y+\frac{1}{2}}<e<\left(1+\frac{1}{y}\right)^{y+\frac{1}{2}}, \qquad (y\geqq 1)$$

が導かれ，次にこの式で $y=1,2,\cdots,(n-1)$ とおき，かくして得られる不等式を邊々かけあわせると

$$\left(1+\frac{1}{1}\right)^{\frac{3}{2}}\left(1+\frac{1}{2}\right)^{\frac{5}{2}}\cdots\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-\frac{1}{2}}$$
$$=2^{\frac{3}{2}}\frac{3^{\frac{5}{2}}}{2^{\frac{5}{2}}}\cdots\cdots\frac{n^{n-\frac{1}{2}}}{(n-1)^{n-\frac{1}{2}}}=\frac{n^{n-\frac{1}{2}}}{(n-1)\,!}$$

であるから

(9.2)
$$e^{-\frac{1}{12}}\frac{n^{n-\frac{1}{2}}}{(n-1)\,!}<e^{n-1}<\frac{n^{n-\frac{1}{2}}}{(n-1)\,!}$$

を得．そこで

(9.3)
$$n\,!=A(n)n^{n+\frac{1}{2}}e^{-n}$$

とおけば，$n$ のすべての値にたいして

(9.4)
$$e^{\frac{11}{12}}<A(n)<e$$

或は

(9.5)
$$2.50<A(n)<2.72$$

が成立たねばならないことがわかる．よってさし當りこの式により $n!$ を 10% くらいの誤差で見積ることができる．

## §10. 級数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{1+x}}$ の和

後の必要のため正實数 $x$ にたいする級数

(10.1) $$S(1+x)=1+\frac{1}{2^{1+x}}+\frac{1}{3^{1+x}}+\cdots\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{1+x}}$$

の收斂を證明すると同時にその和を任意の精度に見積ることのできる式を與えよう．

(10.2) $$f(u)=\frac{1}{u^{1+x}},\qquad f(n)=f_n=\frac{1}{n^{1+x}}$$

とおけば

$$S(1+x)=f_1+f_2+\cdots\cdots=S_n+R_n,$$

$$R_n=f_{n+1}+f_{n+2}+\cdots\cdots$$

$f(u)$ は $u$ の單調減少な函数であるから

(10.3) $$I_n=\int_n^{\infty}f(u)du=\frac{1}{xn^x}$$

とおけば

$$R_n<I_n<R_{n-1}$$

が成立つ．ところで

$$R_{n-1}-R_n=f_n$$

であるから

$$I_n=R_n+\theta f_n,\qquad 0<\theta<1.$$

よって

$$R_n=\frac{1}{xn^x}-\frac{\theta}{n^{1+x}},\qquad 0<\theta<1$$

と書かれ，かくして

(10.4) $$S(1+x)=\sum_{p=1}^{n}\frac{1}{p^{1+x}}+\frac{1}{xn^x}-\frac{\theta}{n^{1+x}}$$

$$=1+\frac{1}{2^{1+x}}+\cdots\cdots+\frac{1}{(n-1)^{1+x}}+\frac{1}{xn^x}+\frac{\theta'}{n^{1+x}},\qquad 0<\theta'<1$$

なる見積りが得られる．$x>0$ のとき級数 (10.1) が收斂なることはこの式から明らかであるが，級数の和を算出するにはこの式はまだ實用的でない．例えば $x=1$ として

(10.5) $$S(2)=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots\cdots=\frac{\pi^2}{6}$$

を小數5位まで定めようとすれば，$n=500$ として

$$\frac{\theta'}{n^2}<\frac{1}{500^2}=\frac{0.4}{10^5}$$

となるから

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots\cdots+\frac{1}{499^2}+\frac{1}{500} \tag{10.6}$$

を計算せねばならない．この和の中たとえば

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots\cdots+\frac{1}{15^2}=1.58044\cdots\cdots$$

は直接算出し殘りの和 $\sum_{16}^{499}\frac{1}{n^2}$ は **Euler-Maclaurin の公式**または **Gauss の公式**でだすようにすればよい[1]．次の値は Legendre によって與えられた[2]．

| $n$ | $S(n)$ | $n$ | $S(n)$ |
|---|---|---|---|
| 2 | 1.64493 40668 482264 | 11 | 1.00049 41886 041194 |
| 3 | 1.20205 69031 595943 | 12 | 1.00024 60865 533080 |
| 4 | 1.08232 32337 111382 | 13 | 1.00012 27133 475785 |
| 5 | 1.03692 77551 433700 | 14 | 1.00006 12481 350587 |
| 6 | 1.01734 30619 844491 | 15 | 1.00003 05882 363070 |
| 7 | 1.00834 92773 819227 | 16 | 1.00001 52822 594086 |
| 8 | 1.00407 73561 979443 | 17 | 1.00000 76371 976379 |
| 9 | 1.00200 83928 260822 | 18 | 1.00000 38172 932650 |
| 10 | 1.00099 45751 278180 | 19 | 1.00000 19082 127166 |
| | | 20 | 1.00000 09539 620339 |

## §11.　函數 $\tan z$, $\tanh z$, $\cot z$, $\coth z$

次に函數

$$\left\{\begin{array}{ll}\tan z=\dfrac{\sin z}{\cos z}, & \tanh z=\dfrac{\sinh z}{\cosh z}=\dfrac{1}{i}\tan iz,\\[2ex] \cot z=\dfrac{1}{\tan z}, & \coth z=\dfrac{1}{\tanh z}\end{array}\right. \tag{11.1}$$

について考える．これらはすべて **$z=\infty$ を眞性特異點にもつ全有限平面で有理型函數**（卽ち有限なところには極以外の特異點をもたない一價解析函數）であって $\tan z$ は $\cos z$ の零點に，$\tanh z$ は $\cosh z$ の零點にそれぞれ極を有する．いずれも奇函數であって，$\tan z$ は基本週期 $\pi$，$\tanh z$ は基本週期 $i\pi$ をもつ．$\tan z$ を

$$\tan z=\frac{1}{i}\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{e^{iz}+e^{-iz}}=\frac{1}{i}\frac{e^{2iz}-1}{e^{2iz}+1} \tag{11.2}$$

---

1) 拙著「計算法」，朝倉書店（昭和25年），301頁參照．

2) §31 に掲げた文獻．

と書けば，これは $e^{2iz}$ の一つの Möbius の變換[1]になっている．$e^{2iz}$ は前にみたように 0 および ∞ なる二つの値をとらないから，脚註に述べてある Möbius 變換の性質により tan $z$ は $\pm i$ なる二つの値をとらない．同様に tanh $z$ は $\pm 1$ なる値をとらない．§6 でみた指數函數の性質からすぐしたがうように，tan $z$ は $\pm i$ とは異る値 $a+ib$ を，$y$ 軸に平行な帯片

$$(11.3)\qquad -\frac{\pi}{2}\leq x<\frac{\pi}{2}$$

に於て必ずただ一度だけとらねばならない（このことは以下に於て直接にも容易に示される）．ところでこれらの場合には函數の週期性を考慮すると明らかなことであるが，一般に次の（これらの場合を特別な場合として含む）有名な Picard の定理が成立つ．即ち $f(z)$ **を** $z=\infty$ **を眞性特異點とする全有限平面** $|z|<\infty$ **に於ける有理型函數とすれば，**$|z|<\infty$ **に於て** $f(z)$ **は高々二つの値を例外として凡べての値を無限回とる．**したがって $w=f(z)$ の逆函數 $z=\varphi(w)$ は無限多價で，その獨立變數 $w$ の變域の Riemann 面は無限葉の**被覆面**になる．このことは換言すれば $z$ 平面が函數 $w=f(z)$ の無限個の基本領域に分割されることを意味するわけで，これについてはまた後に觸れよう．

tan $z$ および tanh $z$ の加法定理は

$$(11.4)\qquad \tan(z_1+z_2)=\frac{\tan z_1+\tan z_2}{1-\tan z_1\tan z_2},\qquad \tanh(z_1+z_2)=\frac{\tanh z_1+\tanh z_2}{1+\tanh z_1\tanh z_2}.$$

また (11.1) を微分して

$$(11.5)\qquad \frac{d}{dz}\tan z=\frac{1}{\cos^2 z}=1+\tan^2 z,$$

$$(11.6)\qquad \frac{d}{dz}\tanh z=\frac{1}{\cosh^2 z}=1-\tanh^2 z.$$

いま

$$(11.7)\qquad \tan z=u,\qquad \tanh z=v\quad (u\neq\pm i,\ v\neq\pm 1)$$

とおいて，$z$ を $u$ または $v$ の函數と考えれば，これらは無限多價であるがどの分枝についてもそれぞれ

$$(11.8)\qquad \frac{d}{du}\tan^{-1}u=\frac{1}{1+u^2},\qquad \frac{d}{dv}\tanh^{-1}v=\frac{1}{1-v^2}$$

が成立つ．帯片 (11.3) に屬する値をとる分枝を $\tan^{-1}u$ の**主値**と定義すれば，§7 に於けると同様にして $|u|<1$ にたいする $\tan^{-1}u$ の主値が次の冪級數で表わされることを示すことができる：

$$(11.9)\qquad \tan^{-1}u=u-\frac{u^3}{3}+\frac{u^5}{5}-\cdots\cdot.$$

---

1) 變換 $w=\dfrac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta}$ は $\alpha\delta-\beta\gamma\neq 0$ のとき **Möbius の變換**とよばれる．始めて A. F. Möbius (1790–1868) によって研究された．これは全 $z$ 平面を全 $w$ 平面に一對一連續且つ等角に寫像する．

同様に $|v|<1$ にたいする $\tanh^{-1} v$ の主値 $\left(-\frac{\pi}{2}<y<\frac{\pi}{2}\right)$ は

$$\tanh^{-1} v = v + \frac{v^3}{3} + \frac{v^5}{5} + \cdots. \tag{11.10}$$

で與えられる．

$z$ の實數値にたいしては $\tan x$ は $x$ の單調函數で $x$ が $-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$ を動くとともに $-\infty$ から $+\infty$ に增大する．同様に $\tanh x$ も $x$ の單調函數で $x$ が $-\infty<x<\infty$ を動くとともに $-1$ から $+1$ に增大する．

いま一般的に $z=x+iy$ とおけば

$$\tan z = \frac{\sin x \cosh y + i \cos x \sinh y}{\cos x \cosh y - i \sin x \sinh y}. \tag{11.11}$$

この分母子に $\cos x \cosh y + i \sin x \sinh y$ をかければ

$$\tan z = \frac{\sin 2x + i \sinh 2y}{\cos 2x + \cosh 2y}. \tag{11.12}$$

そこで $\tan z = a+bi$ とすれば

$$a(\cos 2x + \cosh 2y) = \sin 2x, \tag{11.13}$$

$$b(\cos 2x + \cosh 2y) = \sinh 2y \tag{11.14}$$

が成立たねばならない．これは

$$\begin{cases} a \cosh 2y = \sin 2x - a \cos 2x, \\ a \sinh 2y = b \sin 2x \end{cases} \tag{11.15}$$

と同値である．これより $y$ を消去すれば

$$a^2 = (\sin 2x - a\cos 2x)^2 - b^2 \sin^2 2x$$

或は

$$\sin 2x[(1-a^2-b^2)\sin 2x - 2a\cos 2x] = 0 \tag{11.16}$$

となる．ところで求むる點 $z=x+iy$ は $\tan z$ の極ではないから $\cos 2x + \cosh 2y > 0$ でなければならず，從って (11.13) から $\sin 2x$ は $a=0$ のときそしてこのときにのみ 0 となる．まず $a \neq 0$ とすると (11.16) から

$$\cot 2x = \frac{1-a^2-b^2}{2a}. \tag{11.17}$$

これを (11.15) から得られる關係に入れると

$$\tanh 2y = \frac{b \sin 2x}{\sin 2x - a\cos 2x} = \frac{2b}{1+a^2+b^2} \tag{11.18}$$

を得，これにより $y$ が一意的に定まる．(11.3) の範圍内の $x$ を (11.17) から一意的に定めるには，なお $\sin 2x$ が $a$ の符號，$\cos 2x$ が $1-a^2-b^2$ の符號をもたねばならないことを考慮する必要がある．

$a=0$ のときは $\sin 2x=0$. $\therefore$ $x=0$. すると (11.14) より

$$b(1+\cosh 2y)=\sinh 2y.$$

これは $\sinh 2y=2\sinh y\cosh y$, $1+\cosh 2y=2\cosh^2 y$ を用いると

$$\tanh y=b$$

となり, $b\neq\pm 1$ であれば $y$ を一意的に定める. これで前に述べた性質, 即ち $\tan z$ が $\pm i$ とは異る値を (11.3) の範圍内に於て必ず一度だけとることが直接に示された.

次に $\tan^{-1}u$ および $\tan^{-1}\dfrac{1}{u}$ がそれぞれ主値を表わすときはその間に

$$\tan^{-1}u+\tan^{-1}\frac{1}{u}=\frac{\pi}{2} \tag{11.19}$$

なる關係が成立つ. それは $\tan^{-1}u=z$ とすれば $u=\tan z$, $\dfrac{1}{u}=\tan\left(\dfrac{\pi}{2}-z\right)$ なることから明らかである.

## §12. $\pi$ の數値計算

$\dfrac{\pi}{4}$ は方程式

$$\tan z=1 \tag{12.1}$$

の根である. Abel の定理により級數 (11.9) は $u=1$ として

$$\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\cdots\cdot \tag{12.2}$$

を與えるがこれはもちろん數値計算には役立たない. 一般に $|u|$ が 1 に近いと級數 (11.9) は收斂がおそくなりその缺點を補うためには加法定理 (11.4) を用いねばならない. イギリスの天文學者 J. Machin は 1700 年頃この考で $\pi$ の數値計算に有效な級數を見出した. まず

$$\tan\alpha=\frac{1}{5} \tag{12.3}$$

をみたす正數 $\alpha$ を考える. すると

$$\tan 2\alpha=\frac{\frac{2}{5}}{1-\frac{1}{25}}=\frac{5}{12}, \tag{12.4}$$

$$\tan 4\alpha=\frac{\frac{10}{12}}{1-\frac{25}{144}}=\frac{120}{119}. \tag{12.5}$$

そこで

$$\beta=4\alpha-\frac{\pi}{4} \tag{12.6}$$

とおくと

(12.7)
$$\tan\beta=\frac{\tan 4\alpha-1}{1+\tan 4\alpha}=\frac{1}{239}.$$

よって

(12.8)
$$\begin{cases}\pi=16\alpha-4\beta,\\ \alpha=\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{3\cdot 5^3}+\dfrac{1}{5\cdot 5^5}-\cdots\cdots,\\ \beta=\dfrac{1}{239}-\dfrac{1}{3\cdot 239^3}+\cdots\cdots.\end{cases}$$

$\pi$ を小數 10 位まで正確に定めれば

$$16\alpha=16\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{3\cdot 5^3}+\cdots\cdots-\frac{1}{15\cdot 5^{15}}\right)=3.15832\ \ 89576\ \ 00\cdots\cdots$$

$$4\beta=4\left(\frac{1}{239}-\frac{1}{3\cdot 239^3}\right)\qquad=0.01673\ \ 63040\ \ 04\cdots\cdots$$

$$\pi=3.14159\ \ 26536$$

## §13. $\pi\cot\pi z$ の部分分數分解

後に有用な公式

(13.1)
$$\pi\cot\pi z=\frac{1}{z}+\sum_{n=-\infty}^{\infty}{}'\left(\frac{1}{z+n}-\frac{1}{n}\right)$$

を證明しよう[1]. この右邊の和は有理函數の類似な表現の擴張と考えられるので, 全有限平面で有理型な函數なる $\pi\cot\pi z$ の**部分分數分解**とよばれている.

いま函數 $z\cot z$ を考えるに, これを $\cos z\div(\sin z/z)$ とみて, 分母子の冪級數展開の割算を行って始めの數項をだせば

(13.2)
$$z\cot z=1-\frac{1}{3}z^2-\frac{1}{45}z^4-\cdots\cdots$$

を得. $z\cot z$ は $z=0$ に於て正則な偶函數である. (13.2) より

(13.3)
$$\pi\cot\pi z=\frac{1}{z}-\frac{\pi^2}{3}z-\frac{\pi^4}{45}z^3-\cdots\cdots$$

が成立つ. よって $\pi\cot\pi z$ が $z=0$ に於て留數 1 なる 1 位の極をもつことがわかるが, 一方に於て同函數は 1 なる週期をもつから, 結局 $\pi\cot\pi z$ は $z=n$ $(n=0,\pm1,\pm2,\cdots\cdots)$ なる點々に於てそれぞれ留數 1 なる 1 位の極をもつところの全有限平面 $|z|<\infty$ で有理型な函數であることがわかる. ところでこのような函數の存在それ自身に關して **Mittag-Leffler の定理**がある. 卽ち**無限遠點にのみ集積する無數に多くの點**

$$a_1, a_2, \cdots\cdots, a_n, \cdots\cdots,\ \lim_{n\to\infty}a_n=\infty$$

**およびこれにそれぞれ對應して** $\dfrac{1}{z-a_n}$ $(n=1,2,\cdots\cdots)$ **の有理整式で常數項を有しないもの**

1) $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty}{}'$ は $\displaystyle\sum_{n=-\infty,\,n\neq 0}^{\infty}$ の意味.

$$P_1\left(\frac{1}{z-a_1}\right),\quad P_2\left(\frac{1}{z-a_2}\right),\quad \cdots\cdots,\quad P_n\left(\frac{1}{z-a_n}\right),\quad \cdots\cdots$$

**が任意に與えられたとすれば，$a_n$ ($n=1,2,\cdots\cdots$) に於て $P_n\left(\frac{1}{z-a_n}\right)$ を主要部とする全有限平面 $|z|<\infty$ で有理型な函數がつねに存在する.**[1]

我々の場合にはこのような函數を作ってみせることは容易である．まず $n=0$ は除外して，級數

(13.4) $$\sum_{n=-\infty}^{\infty}{}' \frac{1}{n^2}$$

が收斂なることに注目すれば，級數

(13.5) $$F(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}{}' \frac{1}{(z+n)^2}$$

が $z=\pm1,\ \pm2,\ \cdots\cdots$ のいずれをも含まない任意の有界閉領域で一樣收斂なことは明らかで，$z=n=\pm1,\pm2,\cdots\cdots$ の點々ではそれぞれ $\frac{1}{(z-n)^2}$ なる主要部をもつ．從って級數はこれらの點々を極とする全有限平面で有理型な函數 $F(z)$ を表わす．そこで $F(z)$ を $z=0$ から $\pm1,\pm2,\cdots\cdots$ のいずれとも異る任意の點 $z$ まで積分するに項毎に積分できて，

$$-\int_0^z F(t)dt=\sum_{n=-\infty}^{\infty}{}' \left(\frac{1}{z+n}-\frac{1}{n}\right)$$

に於て $z=\pm1,\ \pm2,\ \cdots\cdots$ にそれぞれ留數 1 なる 1 位の極をもつ全有限平面で有理型な函數が得られる．かくてこれに $\frac{1}{z}$ を加えた函數

(13.6) $$\psi(z)=\frac{1}{z}+\sum_{n=-\infty}^{\infty}{}' \left(\frac{1}{z+n}-\frac{1}{n}\right)$$

は正に，$\pi\cot\pi z$ と同樣に，$z=n$ ($n=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots\cdots$) に留數 1 なる 1 位の極をもつ全有限平面で有理型な函數である．さてしからば差

(13.7) $$\pi\cot\pi z-\psi(z)\equiv G(z)$$

は全有限平面で正則，即ち $z$ の整函數でなければならないが，この $G(z)$ が恆等的に 0 なることが示されればよい．

(13.3) より

(13.8) $$\lim_{z\to0}\left(\pi\cot\pi z-\frac{1}{z}\right)=0,$$

また (13.6) より

(13.9) $$\lim_{z\to0}\left(\psi(z)-\frac{1}{z}\right)=0.$$

---

1) 證明は例えば竹內端三，函數論上卷あるいは辻正次，函數論上卷 (朝倉書店，昭和 27 年).

從ってまず

(13.10)
$$G(0)=0$$

なることはわかる．ところで關係 (13.9) はいかにしていえるか．それは函數 $\psi(z)-\dfrac{1}{z}=\sum'\left(\dfrac{1}{z+n}-\dfrac{1}{n}\right)$ が $z=0$ に於て連續なることに基くのであるが，この性質並びに既に級數 (13.5) に關して述べた性質はすべてこれからもしばしば使うところの **Weierstrass の定理**[1]:

**$\{f_n(z)\}$ の函數はすべて領域 $D$ に於て正則で且つ級數**

$$f(z)=f_1(z)+f_2(z)+\cdots\cdots$$

**は $D$ に於て廣義一様に收斂するとすれば，和 $f(z)$ は $D$ に於て正則（從って連續）で且つ $D$ に於て項毎微分法**

$$f^{(p)}(z)=f_1^{(p)}(z)+f_2^{(p)}(z)+\cdots\cdots$$

**が成立ち，しかも右邊の級數は $D$ に於て廣義一様に收斂する**

の適用によって生ずるものである．卽ち級數 $\sum'\left(\dfrac{1}{z+n}-\dfrac{1}{n}\right)$ は全有限平面から極 $z=n$ ($n=\pm1, \pm2, \cdots\cdots$) をとり去った殘りの領域 $D$ に於て廣義一様收斂[2]であるから，定理により特に $z=0$ に於て正則從ってそこで連續であって (13.9) が成立つのである．

さて再び Weierstrass の定理により函數 $\psi(z)$ の導函數を級數の項毎微分によって求めると，(13.7) の兩邊を微分した式から

(13.11)
$$G'(z)=-\frac{\pi^2}{\sin^2\pi z}+\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{(z+n)^2}$$

を得る．いまこの式で變數 $z$ を $z/2$ または $(z+1)/2$ でおきかえると

$$G'\left(\frac{z}{2}\right)=-\frac{\pi^2}{\sin^2\dfrac{\pi z}{2}}+\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{4}{(z+2n)^2},$$

$$G'\left(\frac{z+1}{2}\right)=-\frac{\pi^2}{\cos^2\dfrac{\pi z}{2}}+\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{4}{(z+2n+1)^2}$$

を得るが，この二式を邊々加えて結果を (13.11) と比較すれば，$G'(z)$ が函數關係

(13.12)
$$G'\left(\frac{z}{2}\right)+G'\left(\frac{z+1}{2}\right)=4G'(z)$$

をみたすことがわかる．よって $M$ を圓 $|z|<2$ の內部に於ける $|G'(z)|$ の上端とすると，この圓の任意の點 $z$ とともに點 $z/2$, $(z+1)/2$ もこの圓に含まれるから，(13.12) より

1) 附錄 I. 定理 8.

2) 一般に領域 $D$ に含まれる任意の有界閉集合 $S$ の上で一様收斂なるとき $D$ に於て**廣義一様收斂**であるという．

$$|G'(z)| \leqq \frac{1}{4}\left|G'\left(\frac{z}{2}\right)\right| + \frac{1}{4}\left|G'\left(\frac{z+1}{2}\right)\right| \leqq \frac{M}{2}$$

が從う．この關係は圓 $|z|<2$ のすべての點 $z$ にたいして成立するから $M \leqq M/2$ が成立たねばならない．よって $M=0$ が從う．かくて $G'(z)$ は圓 $|z|<2$ に於て，從って一致の定理により，全平面で消えねばならないから，整函數 $G(z)$ は常數でなければならない．しかるに (13.10) があるから $G(z) \equiv 0$．かくて (13.1) が證明された．(13.1) の和に於て $n$ の項と $-n$ の項を一緒にすると，この式は次の如くにも書ける．

$$\pi \cot \pi z = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2-n^2}. \tag{13.13}$$

(13.13) を用いると展開式 (13.3) の一般項を定めることができる．$|z|<1$ に於て $n=1, 2, \cdots\cdots$ にたいし

$$\frac{2z}{z^2-n^2} = -\frac{2z}{n^2} - \frac{2z^3}{n^4} - \frac{2z^5}{n^6} - \cdots\cdots$$

と展開され，級數 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2-n^2}$ は $|z|<1$ で廣義一様に收斂であるから，**Weierstrass の二重級數定理**[1]により，(10.4) の記號を用いて

$$\pi \cot \pi z = \frac{1}{z} - 2S(2)z - 2S(4)z^3 - \cdots\cdots \tag{13.14}$$

が成立つ．これよりなお

$$\pi z \cot \pi z = 1 - 2\sum_{n=1}^{\infty} S(2n) z^{2n} \tag{13.15}$$

或は

$$\frac{z}{2} \cot \frac{z}{2} = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{S(2n)}{2^{2n-1}\pi^{2n}} z^{2n} \tag{13.16}$$

が得られる．

ついでにここに展開式[2]

$$\frac{z}{e^z-1} = 1 - \frac{z}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} B_{2n} \frac{z^{2n}}{(2n)!} \tag{13.17}$$

の係數として定義される **Bernoulli の數** $B_{2n}$ と數 $S(2n)$ との關係

$$\frac{B_{2n}}{(2n)!} = (-1)^{n+1} \frac{2S(2n)}{(2\pi)^{2n}}, \quad (n \geqq 1) \tag{13.18}$$

を示しておこう．(13.16) に於て $z$ の代わりに $iz$ とおけば

$$\frac{iz}{2} \cot \frac{iz}{2} = \frac{z}{2} + \frac{z}{e^z-1} = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{S(2n)}{2^{2n-1}\pi^{2n}} (-1)^n z^{2n},$$

---

1) 附錄 I．定理 8．

2) 拙著計算法 255 頁．

即ち

$$\frac{z}{e^z-1}=1-\frac{z}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2S(2n)}{(2\pi)^{2n}}z^{2n}. \tag{13.19}$$

これを (13.17) と比較すればよい.

$$B_0=1,\quad B_1=-\frac{1}{2},\quad B_2=\frac{1}{6},\quad B_4=-\frac{1}{30},\quad B_6=\frac{1}{42},\quad B_8=-\frac{1}{30},\quad \cdots\cdots$$

$B_3=B_5=\cdots\cdots=0$ である.

### §14. 整函數 $\sin\pi z$ の因數分解

ガンマ函數の逆數は整函數であるが，ここに整函數の因數分解定理を $\sin\pi z$ について考えておこう．まず關係

$$\frac{d}{dz}\ln\frac{\sin\pi z}{\pi z}=\pi\cot\pi z-\frac{1}{z} \tag{14.1}$$

から出發する．ここに對數は任意の一分枝を考えるとしておいてよい．いまこの式の右邊に (13.1) の展開を入れ兩邊を 0 から $z$ まで積分すれば，前に注意したように，右邊の展開式は全有限平面から $z=n$ $(n=\pm1,\pm2,\cdots\cdots)$ をとり去った領域 $D$ に於て廣義一樣收斂であるから項毎積分ができ，なお

$$\lim_{z\to0}\frac{\sin\pi z}{\pi z}=1$$

に注意して

$$\begin{aligned}\ln\frac{\sin\pi z}{\pi z}&=\int_0^z\sum_{n=-\infty}^{\infty}{}'\left(\frac{1}{z+n}-\frac{1}{n}\right)dz\\&=\sum_{n=-\infty}^{\infty}{}'\left[\ln\left(1+\frac{z}{n}\right)-\frac{z}{n}\right]\\&=\sum_{n=-\infty}^{\infty}{}'\ln\left[\left(1+\frac{z}{n}\right)e^{-\frac{z}{n}}\right]\end{aligned} \tag{14.2}$$

を得る．ただし右邊の對數はすべてその主値をとる．對數の多價性にもとづくこの不定性は兩邊の指數函數を作ることにより消滅して

$$\sin\pi z=\pi z\prod_{n=-\infty}^{\infty}{}'\left(1+\frac{z}{n}\right)e^{-\frac{z}{n}} \tag{14.3}$$

なる **$\sin\pi z$ の積表示**或は**因數分解**が得られる．いま無限積に關する定理[1]によって (14.3) にある無限積が全有限平面で廣義一樣收斂することを直接檢してみるに，

$$u_n(z)=\left(1+\frac{z}{n}\right)e^{-\frac{z}{n}}-1 \tag{14.4}$$

とおき，任意の自然數 $N$ をとりこれにたいし $|z|\leq\frac{1}{2}N$ なる $z$ を考えれば，$n>N$ にたいし

---

[1] 附錄 I. 定理 11 を見よ.

$$|u_n(z)| = \left| -\frac{1}{2!}\frac{z^2}{n^2} + \frac{2}{3!}\frac{z^3}{n^3} - \frac{3}{4!}\frac{z^4}{n^4} + \cdots \right|$$
$$\leqq \frac{|z|^2}{n^2}\left\{1 + \frac{|z|}{n} + \frac{|z|^2}{n^2} + \cdots\right\}$$
$$\leqq \frac{1}{4}\frac{N^2}{n^2}\left\{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots\right\} = \frac{1}{2}\frac{N^2}{n^2}$$

が成立つ．級數 $\sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{N^2}{2n^2}$ は收斂であるから閉領域 $|z| \leqq \frac{1}{2}N$ に於て $\sum_{n=N+1}^{\infty} u_n(z)$ は絕對且つ一様收斂である．よって 級數 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(z)$ は全有限平面で絕對且つ廣義に一様收斂し，從って上に述べた定理および Weierstrass の定理により無限積 $\pi z \mathop{\Pi'}_{n=-\infty}^{\infty}(1+u_n(z))$ は一つの整函數（實は $\sin \pi z$）を表わすのである．なお絕對收斂性により順序を變えて $n$ と $-n$ の項を一緒にして

$$\sin \pi z = \pi z \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right) \tag{14.5}$$

と書くことができる．

(14.5) に於て $z=\frac{1}{2}$ とおけば J. Wallis (1616–1703) によって發見された公式

$$\frac{2}{\pi} = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{1}{4n^2}\right) = \prod_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)(2n+1)}{2n \cdot 2n} \tag{14.6}$$

が得られる．

$\cos \pi z$ に關しては

$$\cos \pi z = \frac{\sin 2\pi z}{2\sin \pi z} = \frac{2\pi z\, \Pi'\left(1 + \frac{2z}{n}\right)e^{-2\frac{z}{n}}}{2\pi z\, \Pi'\left(1 + \frac{z}{n}\right)e^{-\frac{z}{n}}}$$

の共通因數を分母子から約することにより容易に

$$\cos \pi z = \prod_{n=-\infty}^{\infty}\left(1 + \frac{2z}{2n+1}\right)e^{-\frac{2z}{2n+1}} \tag{14.7}$$

が導かれる．$n$ の負なる値 $n'$ にはそれぞれ $2n'+1 = -(2n+1)$ なる $n \geqq 0$ が對應するからこの二つの因數を一緒にすると

$$\cos \pi z = \prod_{n=0}^{\infty}\left(1 - \frac{4z^2}{(2n+1)^2}\right) \tag{14.8}$$

が得られる．

(14.5) の積を

$$\left(1-\frac{z}{1}\right)\left(1+\frac{z}{1}\right)\left(1-\frac{z}{2}\right)\left(1+\frac{z}{2}\right)\cdots$$

の形に書くことはできない．この積は發散するのであって $1+\frac{z}{n}$ に $e^{-\frac{z}{n}}$ なる因數をかけて (14.3)

の積を作ることにより收斂積が得られるのである．この事情を明らかにしたのが次の Weierstrass および Hadamard の定理である[1]．

無限遠點にのみ集積する任意の數列 $a_1, a_2, \cdots\cdots$ が與えられれば，これらの點だけを零點とする整函數がつねに作られる．それには標準因數

(14.9) $$E(u,0)=1-u,\quad E(u,p)=(1-u)\,e^{u+\frac{u^2}{2}+\cdots+\frac{u^p}{p}}\quad (p=1,2,\cdots\cdots)$$

を用意する．零點を $|a_1|\leqq|a_2|\leqq\cdots\cdots$ の如く並べたとし $|a_n|=r_n$ とするとき級數

(14.10) $$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{r_n}\right)^{p_n}$$

が $r$ のすべての正數値にたいし收斂なる如き任意の正整數列 $p_1, p_2, \cdots\cdots$ をとって

(14.11) $$f(z)=\prod_{n=1}^{\infty}E\left(\frac{z}{a_n},\ p_n-1\right)$$

とおけばこれが求むる整函數である．逆に $f(z)$ を $f(0)\neq 0$ なる任意の整函數とすれば次のように因數分解される：

(14.12) $$f(z)=f(0)\,P(z)\,e^{g(z)},$$

ここに $P(z)$ は標準因數のある積で，$g(z)$ は一つの整函數である．以上が **Weierstrass の定理**である

しかし以上は餘りに一般的で，有用な結果は有限な位數の整函數にたいして始めて與えられる．整函數 $f(z)$ は $|z|=r\to\infty$ のとき

$$f(z)=O(e^{r^A})$$

なる正數 $A$ が見出されるならば**有限な位數**であるといい，このような $A$ の下端 $\rho$ を函數の**位數**とよぶ．よって $\rho$ が $f(z)$ の位數であれば任意の $\varepsilon>0$ にたいし

$$f(z)=O(e^{r^{\rho+\varepsilon}})$$

である．有限な位數の整函數は多項式の次に簡單なもので，多項式は位數 0，函數 $e^z$, $\sin z$, $\cos z$ は位數 1，$\cos\sqrt{z}$ は位數 $\dfrac{1}{2}$，$e^{z^k}$ ($k$ 正整數) は位數 $k$，$e^{e^z}$ は位數無限大である．

有限な位數 $\rho$ の整函數 $f(z)$ については，その零點の絕對値を $r_1\leqq r_2\leqq\cdots\cdots$ とするとき，級數

(14.13) $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{r_n{}^{\alpha}}$$

は $\alpha>\rho$ のとき收斂することが示される．よって今この級數が收斂なる如き數 $\alpha$ の下端を $\rho_1$ とすれば $\rho_1\leqq\rho$ である．$\rho_1$ を**零點の收斂指數**という．$\rho_1<\rho$ の場合は實際ある．例えば $f(z)=e^z$ では $\rho=1$，しかし零點をもたないから $\rho_1=0$ である．この定理の重要な結果として，有限な位數の整函數

[1] 證明は例えば E. C. Titchmarsh, The Theory of Functions, 1932. Chap. VIII. 參照．

の零點にたいしては，$z$ のすべての値にたいし積

(14.14) $$\prod_{n=1}^{\infty} E\left(\frac{z}{a_n},\ p\right)$$

が收斂する如き $n$ に無關係な整數 $p$ が存在することがいえる．それは，(14.11) に於て $p_n-1=p$ とすれば積 (14.14) は級數

(14.15) $$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{r_n}\right)^{p+1}$$

が收斂ならば收斂なわけであるが，(14.15) の收斂は $p+1>\rho_1$ なら從ってなおさら $p+1>\rho$ なら確かに滿たされるからである．

級數 (14.15) が收斂するような最小の整數 $p$ を $f(z)$ の**種數**といい，この $p$ をもって作られた積 (14.14) を $f(z)$ の零點から作られた**基準積**という．そうすると **$f(z)$ が $f(0)\neq 0$ なる位數 $\rho$ の整函數で $a_1, a_2, \cdots\cdots$ がその零點ならば $f(z)$ は次のように分解される：**

(14.16) $$f(z)=P(z)\,e^{Q(z)},$$

**ここに $P(z)$ は $f(z)$ の零點から作られた基準積，$Q(z)$ は高々 $\rho$ 次の多項式である．**これが **Hadamard の定理**である．

この定理を $\sin \pi z$ の因數分解に應用して見よう．

(14.17) $$f(z)=\frac{\sin \pi z}{\pi z}$$

とおく．$f(z)$ の零點は $\pm 1, \pm 2, \cdots\cdots$ で級數 (14.15) の

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{n}\right)^{p+1}$$

が收斂なる最小の整數 $p$ は $=1$．よって $f(z)$ の種數は 1 であって，$f(z)$ の零點から作られた基準積は

$$P(z)=\prod_{n=-\infty}^{\infty}{}'\left(1+\frac{z}{n}\right)e^{-\frac{z}{n}}$$

である．また $f(z)$ の位數 $\rho=1$ であるから Hadamard の定理に於て $Q(z)$ は高々一次式で

$$\frac{\sin \pi z}{\pi z}=e^{az+b}P(z)$$

と表わされる．$f(z)$, $P(z)$ はいずれも $z$ の偶函數であるから $Q(z)$ もそうでなければならない．よって $a=0$，そして $z=0$ とおくと $b=0$ となる．よって (14.3) が從う．

**問 1.** $\lambda\neq 0$ ならば函數 $e^{\lambda z}-z$ は無數に多くの零點をもつことを證明せよ．(もし有限個の零點しかないならば，$P(z)$ を一つの多項式として

$$e^{\lambda z}-z=e^{az+b}P(z)$$

と表わされることから矛盾をだせ).

問2.　$a$ が $\pi$ の整數倍でなければ

$$\sin(a-z)=\sin a\prod_{n=-\infty}^{\infty}\left(1-\frac{z}{a+n\pi}\right)e^{\frac{z}{a+n\pi}}$$

なることを證明せよ.

問3.　$\sin z=z^2$ が無數に多くの根をもつことを示せ.

問4.　函數

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{e^n}\right)$$

は位數 0 の整函數である.

## § 15.　等角寫像に於ける特異點，交叉點

§6 および §11 に於て $w=e^z$ および $\tan z$ による等角寫像を論じたが，これらはその導函數が決して0にならないものであった．ガンマ函數の導函數は零點をもつ．よってここにこの問題を一般的に考えておこう．

函數 $w=f(z)$ は點 $z_0$ に於て正則とすれば，$z_0$ の近傍に於て

$$w=f(z)=\sum_{m=0}^{\infty}a_m(z-z_0)^m \tag{15.1}$$

と展開され

$$\frac{dw}{dz}=f'(z)=\sum_{m=1}^{\infty}ma_m(z-z_0)^{m-1} \tag{15.2}$$

が成立つ．このとき $a_1=f'(z_0)\neq0$ ならば $z_0$ は $f(z)$ の**單純な $a_0$ 點**であるといい，もし $a_1=f'(z_0)$, $a_2=f''(z_0)/2!$, $\cdots\cdot$, $a_{k-1}=f^{(k-1)}(z_0)/(k-1)!$ がすべて 0 で $a_k=f^{(k)}(z_0)/k!\neq0$ ならば，$z_0$ は $f(z)$ の **$k$ 重の $a_0$ 點**或は後に述べる理由から **$(k-1)$ 次の交叉點**であるという．特に $a_0=f(z_0)=0$ のときは，始めの場合 $z_0$ は $f(z)$ の**單純な零點**，後の場合 $z_0$ は $f(z)$ の **$k$ 重の零點**である．$a_0$ の値の如何にかかわらず

$$f'(z)=ka_kg(z)(z-z_0)^{k-1},\quad g(z_0)=1,\quad (k\geqq1,\ a_k\neq0) \tag{15.3}$$

と書かれ，商 $(w-w_0)/(z-z_0)$ は $z\to z_0$ のとき $f'(z_0)$ に近づくから

$$\frac{w-w_0}{f'(z)(z-z_0)}\quad 即ち\quad \frac{w-w_0}{ka_kg(z)(z-z_0)^k} \tag{15.4}$$

は 1 に近づく．いま

$$\left\{\begin{aligned}&a_n=|a_n|e^{i\lambda},\\&z-z_0=re^{i\theta}\\&w-w_0=\rho e^{i\varphi}\end{aligned}\right. \tag{15.5}$$

とおけば，いま述べた關係は

$$\lim\left\{\frac{\rho}{r^k}e^{i(\psi-k\theta)}\right\}=k|a_k|e^{i\lambda} \tag{15.6}$$

となる．よって $z\to z_0$ のとき

$$\lim\frac{\rho}{r^k}=k|a_k|,\qquad \lim(\psi-k\theta)=\lambda \tag{15.7}$$

が成立ち，この各式の右邊は $z$ が $z_0$ に近づく路には無關係な値である．

さて單純な正則點全體は一つの領域をつくることが證明される，この領域の任意の點 $z_0$ では (15.7) に於て $k=1$ とした關係

$$\lim\frac{\rho}{r}=|a_1|=|f'(z_0)|,\qquad \lim(\psi-\theta)=\lambda \tag{15.8}$$

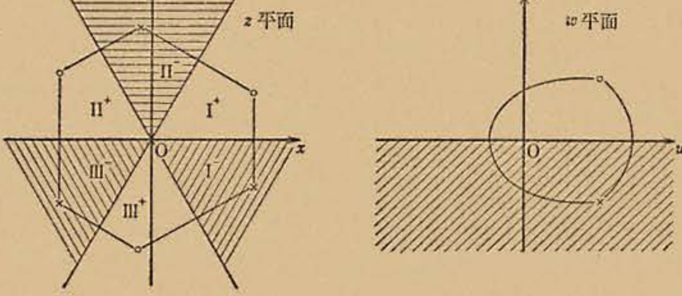
が成立ち，このことは $w=f(z)$ による寫像が $|a_1|$ 倍の**伸長**と角 $\lambda$ だけの**廻轉**であることを意味するから，原像と像の間には微小部分に於ける**同じ向きの相似性**或は**等角性**が成立つわけである．

これに反して交叉點はこの等角寫像に於ける例外的な點で，その數は高々可附番個に過ぎないことが證明される．そこでは (15.7) の第二の式からわかるように，偏角 $\theta$ が $\dfrac{2\pi}{k}$ だけ增すとき像の偏角 $\psi$ は $2\pi$ だけ增す，即ち像點は一廻轉する．よって交叉點 $z_0$ の近傍は像點 $w_0$ のまわりの $k$ 葉の Riemann 面上の近傍に寫像され，從って $w=f(z)$ の $k-1$ 次の交叉點 $z_0$ の像 $w_0$ は逆函數 $z=\varphi(w)$ の變域なる Riemann 面の **$k-1$ 次の分岐點**であることがわかる．

例えば函數 $w=z^3$ では $dw/dz=3z^2$ だから $z=0$ は 2 次の交叉點であり，その像である $w=0$ は逆函數 $z=\sqrt[3]{w}$ の 2 次の分岐點である．$z=re^{i\theta}$, $w=e^{u+iv}$ とおけば

$$r^3=e^u,\qquad \theta=\frac{v}{3}. \tag{15.9}$$

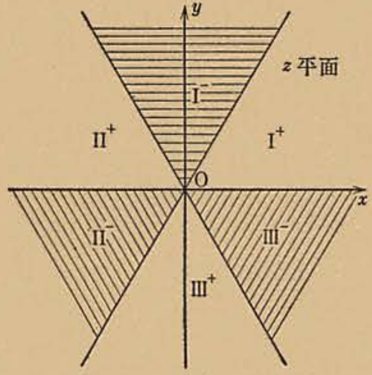
よって $z=0$ のまわりを正實軸を始線として 60° ずつに分割すれば，圖の角領域 $\mathrm{I}^+$ は $w$ の上半平面 $\triangle^+$ に，$\mathrm{I}^+$ につづく角領域 $\mathrm{I}^-$ は $w$ の下半平面 $\triangle^-$ に對應し，同樣なことが角領域 $\mathrm{II}^+$ と $\mathrm{II}^-$, $\mathrm{III}^+$ と $\mathrm{III}^-$ についていわれる．これが $w=z^3$ の基本領域分割で



第 10 圖　$w=z^3$ の基本領域

ある．いま $w$ 平面を負實軸に沿うて切斷した領域 $T$ を考えれば，その上で定義される函數 $z=\sqrt[3]{w}$ の三つの分枝がある．よって $T$ と同じ三つの領域 $T^{(1)}$, $T^{(2)}$, $T^{(3)}$ を $w$ 平面の上に重ねておき，

負實軸に沿うてまず $T^{(1)}$ の上岸を $T^{(2)}$ の下岸に次に $T^{(2)}$ の上岸を $T^{(3)}$ の下岸に最後に $T^{(3)}$ の上岸を $T^{(1)}$ の下岸につなげば，かくして得られた3葉からなる Riemann 面上に於て $z=\sqrt[3]{w}$ は一價な函數となる．もっとも基本領域の番號づけには任意性があるわけで，第 11 圖のようにもできる．これは $w$ 平面の正實軸を分岐線にとることに相當する．




第 11 圖 $w=z^3$ の基本領域

この例に於ては $z=\infty$ は函數 $w=z^3$ の 3 位の極であるが，これに相當して $w=\infty$ は逆函數 $z=\sqrt[3]{w}$ の 2 次の分岐點である．このことは $z$ 平面に於て原點を中心とする圓に沿うて $\infty$ のまわりをまわってみれば明らかである．一般に $z_0$ が $w=f(z)$ の $k$ 位の極であるとき，$k=1$ であれば $w=\infty$ に於て寫像の等角性は保たれるが，$k>1$ であれば $z_0$ は $k-1$ 次の交叉點で $w=\infty$ は $k-1$ 次の分岐點となる．

なお $\alpha$ が任意の實または複素の常數なるとき，$z$ **の冪** $z^\alpha$ は

(15.10) $$w=z^\alpha=e^{\alpha \ln z}$$

と定義される．$\ln z$ に主値をとったときの値を $z^\alpha$ **の主値**という．關係

(15.11) $$\ln w=\alpha \ln z$$

を用いて，$z^\alpha$ について普通の（整數）冪についての算法がやはり成立つことが示される．例えば

(15.12) $$(z^\alpha)^\beta=e^{\beta \ln w}=e^{\beta(\alpha \ln z)}=z^{\alpha\beta},$$

(15.13) $$z^\alpha z^\beta=e^{\alpha \ln z}e^{\beta \ln z}=z^{\alpha+\beta},$$

(15.14) $$w=z^\alpha \quad \text{であれば} \quad z=w^{\frac{1}{\alpha}}.$$

(15.15) $$\frac{dw}{dz}=\alpha e^{\alpha \ln z}\cdot\frac{1}{z}=\alpha e^{\alpha \ln z}\cdot e^{-\ln z}=\alpha z^{\alpha-1}.$$

この最後の式から $(1+z)^\alpha$ の主値について次の**二項定理**が從う．

(15.16) $$(1+z)^\alpha=1+\frac{\alpha}{1}z+\frac{\alpha(\alpha-1)}{1\cdot2}z^2+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{1\cdot2\cdot3}z^3+\cdots\cdots.$$

右邊の級數は $|z|<1$ で收斂する．

$\alpha=\dfrac{1}{k}$（$k$ 正整數）のとき，$z=re^{i\theta}$ として

(15.17) $$w_0=\sqrt[k]{r}\, e^{i\frac{\theta}{k}}, \qquad -\pi<\theta<\pi$$

は $w=z^{\frac{1}{k}}$ の主値であるが，これにより $z$ の $k$ 個の $k$ 乗根は

(15.18) $$w_j=w_0\, e^{2\pi i\cdot\frac{j}{k}} \qquad (j=0,1,\cdots,k-1)$$

と表わされる．

次に後の引用のためここでは簡單に $w=f(z)$ は $z=0$ で正則で $z=0$ が $k(\geqq 2)$ 重の零點であるとして，逆函數 $z=\varphi(w)$ の要素を求めてみよう．假定により

$$w=f(z)=a_k z^k+a_{k+1}z^{k+1}+a_{k+2}z^{k+2}+\cdots\cdot \qquad (k\geqq 2,\ a_k\neq 0) \tag{15.19}$$

である．いま

$$w=t^k \tag{15.20}$$

とおきさらに $a_k^{\frac{1}{k}}=b_0$ を $a_k$ の任意の一つの $k$ 乘根として

$$t=a_k^{\frac{1}{k}}\cdot z\left(1+\frac{a_{k+1}}{a_k}z+\frac{a_{k+2}}{a_k}z^2+\cdots\cdot\right)^{\frac{1}{k}} \tag{15.21}$$

とおく．但しこの右邊の最後の因數は主値をとる．$r_0>0$ を十分小さくとれば $|z|<r_0$ にたいして

$$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}z+\frac{a_{k+2}}{a_k}z^2+\cdots\cdot\right|<1 \tag{15.22}$$

が成立つから，二項定理により，(15.21) の最後の因數はこの $z$ にたいし收斂なる冪級數として表わされ

$$t=b_0z+b_1z^2+b_2z^3+\cdots\cdot \qquad (b_0\neq 0) \tag{15.23}$$

と書ける．この級數にたいしては $(dt/dz)_{z=0}=b_0\neq 0$ であるから，逆に

$$z=c_0t+c_1t^2+c_2t^3+\cdots\cdot \qquad \left(c_0=\frac{1}{b_0}=a_k^{-\frac{1}{k}}\right) \tag{15.24}$$

と表わされ，これはある圓 $|t|<\rho_0$ の内部で收斂する．よって圓 $|w|<\rho_0^k$ の内部の各 $w$ の値にたいしまず

$$t_j=t_0\,e^{2\pi ij/k} \qquad (j=0,1,\cdots\cdot,k-1) \tag{15.25}$$

なる $k$ 個の $k$ 乘根 $w^{\frac{1}{k}}$ が對應し，これらのおのおのに (15.24) により一意に $z$ の値 $z_j$ が對應する．かくて要素 (15.19) にたいし $k$ 個の逆要素

$$\begin{cases} z=c_0t+c_1t^2+\cdots\cdot, \\ w=t^k \end{cases} \tag{15.26}$$

が定まることが示された．

等角寫像および Riemann 面の實例についてはさらに §17 に於て述べよう．

## §16.　有理型函數の孤立特異點

函數 $w=f(z)=e^z$ は $z=\infty$ を眞性特異點とする全有限 $z$ 平面で有理型な函數で，これの逆函數の $z=\varphi(w)=\ln w$ は $w=0$ および $\infty$ に對數分岐點をもつ無限多價函數となることは前に述べた．これはいかなる一般的定理にもとづくものか．後に見るようにガンマ函數も同樣に $z=\infty$ を眞性特異點とする全有限平面で有理型な函數でありその逆函數について考える必要がある．よってここに解析函數の孤立特異點について全般的に說明しておこう．

まず一價解析函數について：函數 $f(z)$ が領域 $D$: $0<|z-\omega|<R$ に於て正則であって $\omega$ に於て正則でないとき $\omega$ は $f(z)$ の**孤立特異點**であるといわれる．このとき $f(z)$ は Laurent 級數

$$f(z)=\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{c_{-\nu}}{(z-\omega)^{\nu}}+\sum_{\nu=0}^{\infty}c_{\nu}(z-\omega)^{\nu},\qquad z\in D \tag{16.1}$$

に展開されるが，これに於て

1°．展開が主要部を缺くとき，$\omega$ は**除去可能な特異點**.

2°．主要部が有限級數で

$$f(z)=\frac{c_{-k}}{(z-\omega)^{k}}+\frac{c_{-(k-1)}}{(z-\omega)^{k-1}}+\cdots\cdots+\frac{c_{-1}}{z-a}+\sum_{\nu=0}^{\infty}c_{\nu}(z-\omega)^{\nu},\qquad (c_{-k}\neq 0)$$

のとき，$\omega$ は $k$ 位の**極**.

3°．主要部が無限級數のとき，$\omega$ は**眞性特異點**.

以上の様に分類される．

1° のときは　$\lim_{z\to\omega}f(z)=c_0=$有限確定,

2° のときは　$\lim_{z\to\omega}f(z)=\infty$

であるが 3° のときは如何．これに答えるものが Weierstrass の定理である．いわく，**$f(z)$ を $0<|z-\omega|<R$ で正則，$z=\omega$ を眞性特異點とすれば $f(z)$ は $z=\omega$ の任意の近傍で任意の値に近づく．**くわしくいえば，任意の複素數 $\alpha$ ($\infty$ もこめて)，任意の正數 $r<R$ にたいし，$0<|z_{\nu}-\omega|<r$, $z_{\nu}\to\omega$ なる點列 $\{z_{\nu}\}$ を適當にとれば必らず

$$\lim_{\nu\to\infty}f(z_{\nu})=\alpha \tag{16.2}$$

を成立させることができる[1]．

従っていま (16.2) の意味に於ける極限値 $\alpha$ の全部からなる集合 (これを $f(z)$ の**特異點 $\omega$ に於ける集積値集合**という) を $S_{\omega}$ で表わし，$S_{\omega}$ を $w$ 平面の點集合と考えれば

1°．$z=\omega$ が除去可能ならば $S_{\omega}$ は有限な一點 $w=c_0$ よりなり，

2°．$z=\omega$ が極ならば $S_{\omega}$ は無限遠點 $w=\infty$ のみからなり，

3°．$z=\omega$ が眞性特異點ならば $S_{\omega}$ は全 $w$ 平面から成る．

この右邊の三つの事實によって特異點の分類となすこともできる．

しかし有理型函數の逆函數として導入される多價解析函數の孤立特異點の研究にはもはや Laurent 展開を利用する方法は適用されず一般的に解析接續の方法を用いなければならない (もちろん一價函數の特異點は特別な場合としてこの見地からも研究できる)．

---

[1] この性質を一層精密にしたものが前に述べた Picard の定理である．即ち **$0<|z-\omega|<R$ に於て $f(z)$ を有理型とし $z=\omega$ を眞性特異點とすれば，$0<|z-\omega|<R$ に於て $f(z)$ は高々二つの値を例外としてすべての値を無限回とるのである．** この § の諸定理については例えば能代淸，函數論概說 I および II をみよ．

Weierstrass に從えば，一つの函數要素 $P(z;\ a)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-a)^n$ から出發してその解析接續が可能な限りくまなく解析接續を施して得られる函數要素のすべての集合を **$P(z;a)$ の定める解析函數 $f(z)$** とよび，$f(z)$ が中心 $b$ を共有してしかも相異る二つの要素 $P_1(z;\ b)$, $P_2(z;\ b)$ を含むならば $f(z)$ は**多價解析函數**，これに反して $b$ を中心とする要素が高々一つであるならば $f(z)$ は**一價解析函數**なわけである．しかし $f(z)$ に含まれる一つの要素 $P(z;\ c)$ の中心 $z=c$ に於ける値 $P(c;\ c)$ を **$f(z)$ の $z=c$ に於ける一つの値**と定義すれば通常の函數の意味になる．

同樣に $D$ を任意の領域とするとき $D$ 內の一點 $a$ に於ける一つの要素 $P(z;\ a)$ から出發して $a$ を始點とする $D$ 內の連續曲線に沿うて解析接續が可能な限りくまなく解析接續して得られる要素の集合を **$P(z;\ a)$ の定める解析函數 $f(z)$ の領域 $D$ に於ける分枝**とよび，$D$ に於ける分枝の多價性または一價性が上と同樣に定義される．この分枝の含む要素 $P(z;\ b)$ の中心 $b$ の集合を $\varDelta$ とすれば $\varDelta$ は $D$ に含まれる領域で，$z=b$ に於ける分枝の値を上と同樣に定義すれば領域 $\varDelta$ の上で通常の函數の意味で定義される函數 $f_\varDelta(z)$ が得られる．

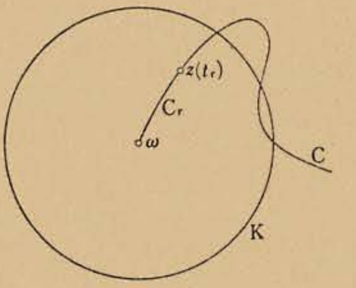
そこで $z=\omega$ が函數 $w=f(z)$ の**孤立特異點**であるというのは，

$$(16.2)\qquad z=z(t),\qquad (0\leqq t<1),\qquad \lim_{t\to 1-0} z(t)=w$$

なる任意の曲線 $C$ をとるときそれに沿うての解析接續

$$(16.3)\qquad P(z;\ z(t)),\qquad (0\leqq t<1)$$

は $z=\omega$ の上に特異點を定義するが，曲線 $C$ と交わる任意の圓 $|z-\omega|=r$ をとるとき $\omega$ から曲線 $C$ に沿うて進み最初にこの圓と交わる點までの $C$ の部分 $C_r$ の上の任意の一點 $z(t_r)$ を中心とする要素 $P(z;\ z(t_r))$ は領域 $D:0<|z-\omega|<r$ 內に含まれる $z(t_r)$ を始點とする任意の曲線に沿うて常に解析接續できることである，換言すれば $P(z;\ z(t_r))$ の領域 $D:0<|z-\omega|<r$ 內に於て定める分枝 $F_r(z)$ が $D$ の內部に坐標をもついかなる特異點をももたないことである[1]．



第 12 圖

このとき（一價解析函數にたいする定義を一般化して）分枝 $F_r(z)$ の値の集合 $\varDelta_r$ の閉苞 $\overline{\varDelta}_r$ を考えると，これは明らかに正數 $r$ とともに減少する性質のもので

$$(16.4)\qquad S_\omega=\lim_{r\to 0}\overline{\varDelta}_r$$

を $w=f(z)$ の $z=\omega$ に於ける**集積値集合**とよぶ．これは連續體になることが證明される．このときもしも $w=f(z)$ が有限多價で且つ $S_\omega$ がただ一點 $\alpha$ からなるならば（このとき $\lim_{z\to\omega} f(z)=\alpha$ と記す）$\omega$ は**代數特異點**とよばれ，代數特異點と異る特異點を**超越特異點**というのである．精しくいえば

1) $\omega$ が無限遠點 $\infty$ のときは圓は $|z|=r$ とし領域 $D$ [illegible] とする．

$w=f(z)$ が無限多價であるかまたは $S_\omega$ が少くも二點を含むかそのいずれかであるとき $\omega$ は超越特異點である．そして $z=\omega$ が超越特異點であって $S_\omega$ がただ一點からなる場合に $\omega$ は**通性**でこれにたいし $S_\omega$ が少くも二點を含む場合に $\omega$ は**眞性**であるという．

例えば $w=e^z$ では Weierstrass の定理により $S_\infty$ は全平面 $|w|\leqq\infty$ であって $\infty$ は眞性特異點である．

$w=\ln z$ では $\ln z$ は無限多價で $S_0=\infty$, $S_\infty=\infty$ であるから $z=0$ および $\infty$ はいずれも通性特異點である．

$w=\sqrt[3]{z}$ では $z=0$ および $z=\infty$ は代數特異點である．

次に超越特異點と密接な關係にある漸近値について説明しよう．$w=f(z)$ は一價でも多價でもよい．もしもそれが多價な場合にはそのすべての函數要素の集合を $R$ とし點 $z=c$ に於ける相異る要素には相異る $R$ の點が對應すると考え $R$ のおのおのの點 $p\equiv P(z\,;\,c)$ に $w$ の $z=c$ に於ける値 $P(c\,;\,c)$ を對應させて，$R$ の上の廣義の一價複素函數 $w=f(p)$ として考える．$R$ を $w=f(p)$ の定義域なる**抽象的 Riemann 面**とよぶ．このように考えた $w=f(z)$ が $R$ に於て一價有理型な函數であれば，$w=f(z)$ の超越特異點は $R$ 上のいわゆる**到達可能な境界點**であることが示されるのであって，いまそれに收斂する $R$ 上の一つの曲線

$$\Gamma:\ p=p(t)\qquad(0\leqq t<1)\tag{16.5}$$

をとるとき，もしも

$$\lim_{t\to1}f(p(t))=\alpha\tag{16.6}$$

ならば $\alpha$ を**曲線 $\Gamma$ に沿うての $w=f(z)$ の漸近値**，$\Gamma$ を $w=f(z)$ の**漸近路**といい，これに反してもし上の極限値が存在しないならば $\Gamma$ を**振動路**という．

例えば $w=e^z$ は一價だから通常の $z$ 平面で考えればよく，$\Re z\to+\infty$ なる任意の曲線 $\Gamma$ にたいし $\lim e^z=\infty$ となり，$\Re z\to-\infty$ なる任意の曲線 $\Gamma$ にたいし $\lim e^z=0$ となるから，$w=0$, $\infty$ が漸近値である．これに反し $\Re z=$有限，$\Im z\to\pm\infty$ となる路はすべて振動路である．

さていま函數を我々の $z=\infty$ を眞性特異點とする全有限平面 $|z|<\infty$ で有理型函數とすれば，Picard の定理によりその逆函數 $z=\varphi(w)$ は $w$ 平面上高々二點を除いて至る所定義される無限多價函數となるが，その超越特異點を定めるのに次の二定理が實用的である．

**Iversen の定理 1.** **$w=f(z)$ の $z=\infty$ に於ける漸近値とその逆函數 $z=\varphi(w)$ の超越特異點の間に一對一の對應が存在する．**

**Iversen の定理 2.** **$w=f(z)$ の高々有限回しかとらない値は必らず $f(z)$ の漸近値である．従って特に $e^z$, $\sin z$ のような超越整函數 $w=f(z)$ は必らず $w=\infty$ を漸近値にもち従って定理 1 によりその逆函數 $z=\varphi(w)$ は少くも $w=\infty$ の上に一つの超越特異點をもつ．**

上に述べたように $w=0, \infty$ は $w=e^z$ の漸近値であるから（このことは Iversen の定理 2 からも明らかである），Iversen の定理 1 により $w=0, \infty$ は逆函數 $z=\ln w$ の超越特異點であって，これらは前に述べたように通性でいわゆる**對數分岐點**である．§6 に述べた負實軸に沿うての切斷は實はこの二つの特異點 0 と $\infty$ を結ぶ曲線だったわけで，Riemann 面を作るそこの目的からいえば，これが負實軸であることは必らずしも必要ではないのである．正實軸をとってもよく或はもっと一般に 0 と $\infty$ とを結ぶ任意の單純曲線をとってそれに沿うて切斷してもよかったのである．

## §17. Riemann 面および等角寫像の例

後にガンマ函數による等角寫像およびガンマ函數の逆函數の變域の Riemann 面を考察する準備として二三の簡單な例題について考えておこう．

例 1. 函數 $w=f(z)=z^3-3z$.

いま $z$ についての三次方程式

$$z^3-3z=w \tag{17.1}$$

によって定義される函數 $z=\varphi(w)$ を考えるに，$w$ の一つの値 $w_0$ にたいし方程式は一般に相異る三つの根

$$z=z_1, z_2, z_3 \tag{17.2}$$

をもつ．しかしながら

$$\frac{dw}{dz}=3z^2-3=0 \tag{17.3}$$

なるとき卽ち $z=1$ または $-1$ に對應する $w=-2$ または 2 にたいしては例外で，このときは對應する $z$ の異る値は 3 個より少くなる．いま $w_0$ を例外な點 $\pm 2$ 以外の任意の點とすれば，その近傍は對應する $z$ 平面の相異る三點 (17.2) の三つの近傍に一對一且つ等角に寫像される．それは例えば $z_1$ にたいして函數

$$w=f(z)=-3z+z^3 \tag{17.4}$$

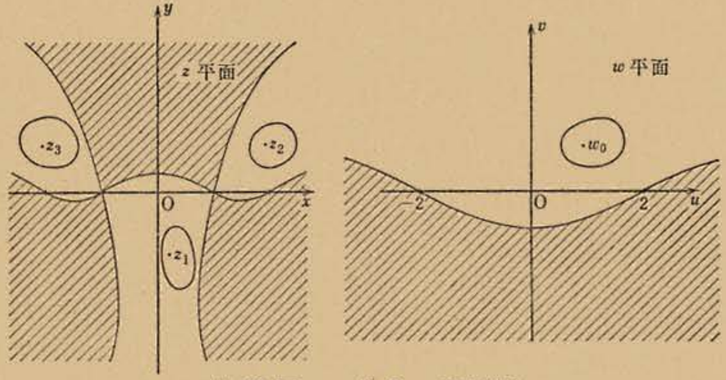
を考えれば，これは $z_1$ に於て正則で

$$\frac{dw}{dz}=f'(z_1)=-3+3z_1^2\neq 0 \tag{17.5}$$

だからである．

$z=\pm 1$ はそれぞれ $w=f(z)$ の一次の交叉點，對應する $w=\mp 2$ は逆函數 $z=\varphi(w)$ の一次の分岐點になる．また $z=\infty$ は $w=f(z)$ の三位の極だから $w=\infty$ は $z=\varphi(w)$ の二次の分岐點である．そこでいま $w$ 平面を三つの分岐點 $w=\pm 2, \infty$ を過ぎる任意の單純曲線に沿うて二つの半平面 $T^+$, $T^-$ に切斷すれば，三價函數 $z=\varphi(w)$ の値を六つの組にわけ集めて各組が $T^+$ または $T^-$ に於て一價正則な函數となるようにできる．

いま $(T^+, T^-)$ と同じな三組の半平面の對 $(T_1^+, T_1^-)$, $(T_2^+, T_2^-)$, $(T_3^+, T_3^-)$ を $w$ 平面上に重ねておき，これら六つの半平面の夫々に上に述べた六つの函數を附屬させる．しかる後これらの半平面を切斷線に沿うて適當につなげば $z=\varphi(w)$ の變域の Riemann 面が得られるわけである．



第 13 圖　$w=z^3-3z$ の基本領域

しかしこれらを如何につなげばよいかは必ずしも明瞭ではない．F. Klein の考え方に從って，いま

(17.6)
$$w=u+iv, \qquad z=x+iy$$

とおくと (17.1) から

$$(x+iy)^3-3(x+iy)=u+iv.$$

よって

(17.7)
$$u=x^3-3xy^2-3x, \qquad v=3x^2y-y^3-3y.$$

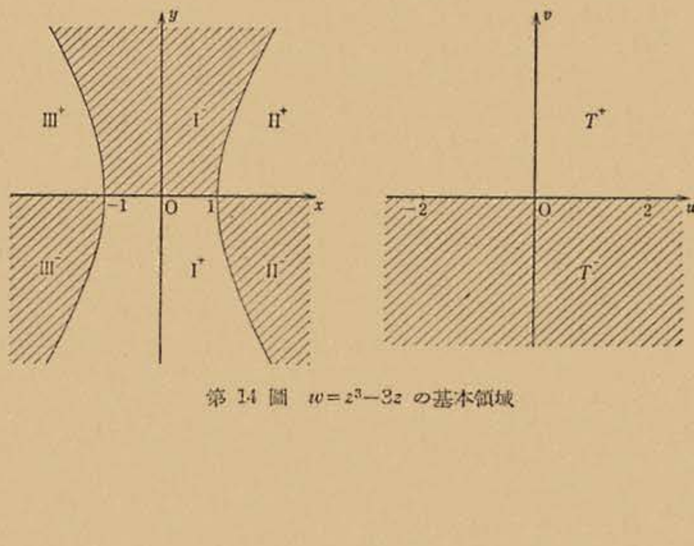
この例ではすべての分岐點を過ぎる切斷線を $w$ 平面の實軸にとることができ，それが最も簡單であるから，この軸 $v=0$ が $z$ 平面のいかなる像にうつるかをまず調べてみよう．(17.7) からそれは

$$y(3x^2-y^2-3)=0$$

によって與えられる．よって求むる像は $z$ 平面上の

(17.8)
$$\text{實軸}\quad y=0 \quad \text{と双曲線}\quad x^2-\frac{1}{3}y^2=1$$

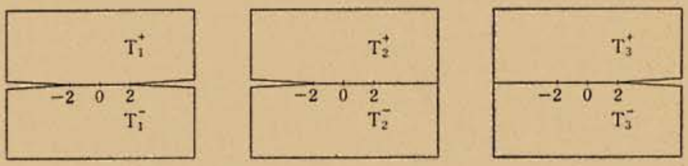
とからなる．これらの曲線は $z$ 平面を 6 個の領域にわけ，このおのおのが $w$ 平面の上の 6 個の半平面 $T_1^+, T_1^-$, $T_2^+, T_2^-$, $T_3^+, T_3^-$ に對應する．下半平面 $v<0$ に對應する領域に影をつけると圖のようになる．



第 14 圖　$w=z^3-3z$ の基本領域

そこで番號づけが問題となるが，その際任意性がある．即ち

$z$ 平面の曲線 (17.8) に沿うて接する任意の二つの領域を合わせて $w$ 平面一枚に對應するものになるのであるが，いま對稱的に考えて I$^+$, I$^-$ と記した領域を合せて第一葉 $T_1^+ + T_1^-$ を定義し，同様に II$^+$, II$^-$ で第二葉 $T_2^+ + T_2^-$ を，III$^+$, III$^-$ で第三葉 $T_3^+ + T_3^-$ を定義したとする．すると第一葉は區間 $-2<u<2$ に沿うては滑かにつながり，第二葉は $-2<u<+\infty$ に沿うて，第三葉は $-\infty<u<2$ に沿うて滑かにつながる．




第 15 圖

さらに双曲線 (17.8) の上では $x^2=1+\frac{y^2}{3}$ であるからこれを (17.7) の $u$ に入れると

$$u=-2x\left(1+\frac{4}{3}y^2\right)$$

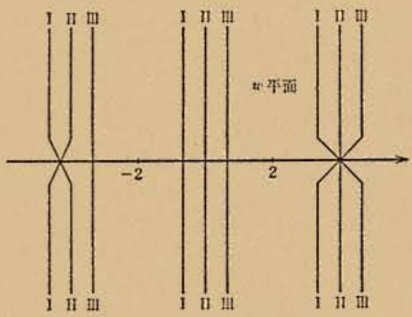
と書かれることからわかるように，I$^-$ と II$^+$ を境する双曲線（その上では $x>1$, $y>0$ である）は $w$ 平面の實軸の

$$u<-2$$

に對應するから，これに沿うて $T_1^-$ を $T_2^+$ につなぐとよい．次に I$^+$ と II$^-$ を境する双曲線（その上では $x>1$, $y<0$ である）は同じく $w$ 平面の實軸の

$$u<-2$$

に對應するから，$T_1^+$ を $T_2^-$ につなぐべきである．第三葉は上にみたようにここでは滑かである．よって $u<-2$ に沿うての連結は第 16 圖の様になる．




第 16 圖

同様に双曲線の殘りの部分について考えれば，$w$ 平面の實軸の

$$u>2$$

に沿うて $T_1^-$ を $T_3^+$ に，$T_1^+$ を $T_3^-$ につなぐべきことがわかる．第二葉はここでは滑かである．

最後に $w$ 平面の實軸の殘りの部分

$$-2<u<2$$

に沿うては三葉とも滑かで，これで求むる Riemann 面が完成された．

もちろん分岐線は連續的にどのように變形してもよいので，分岐點 $w=2, -2, \infty$ を結ぶことさえ滿足すればよいのである．點 $w=\infty$ は三葉が循環的につながっている分岐點である．このことは $z$ 平面に於て原點のまわりに大きな圓を描いてたどってみれば明らかである．

例 2.
$$w=\frac{1}{2}\left(z^2+\frac{1}{z^2}\right).$$

今度は $w$ の一つの値にたいし一般に $z$ の 4 つの値があるが，

$$\frac{dw}{dz}=z-\frac{1}{z^3}=0$$

をみたす $z$ の値

(17.9)
$$z=1,\ i,\ -1,\ -i$$

にたいする $w$ の値

(17.10)
$$w=1,\ -1,\ 1,\ -1$$

は例外である．(17.9) の 4 點はおのおの $w=f(z)$ の一次の交叉點であり，從って (17.10) の 2 點 $w=1,\ -1$ の上には逆函數 $z=\varphi(w)$ の一次の分岐點がそれぞれ 2 個宛ある．この例でも $w=1,\ -1$ は實軸の上にあるから例 1 で用いたと同じ方法が用いられる．しかし今度は $z$ 平面では極坐標

$$z=re^{i\theta}$$

を使った方が便利である．$w=U+iV$ とすると方程式は

$$\frac{1}{2}\left(r^2+\frac{1}{r^2}\right)\cos 2\theta+\frac{i}{2}\left(r^2-\frac{1}{r^2}\right)\sin 2\theta=U+iV$$

となるから

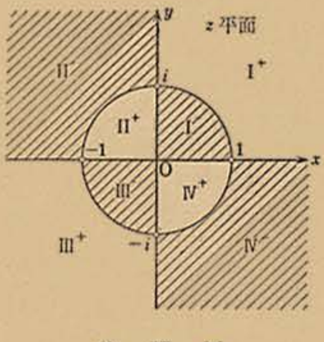
(17.11)
$$U=\frac{1}{2}\left(r^2+\frac{1}{r^2}\right)\cos 2\theta,\qquad V=\frac{1}{2}\left(r^2-\frac{1}{r^2}\right)\sin 2\theta$$

が成立つ．よって $w$ 平面の實軸 $V=0$ は $z$ 平面の

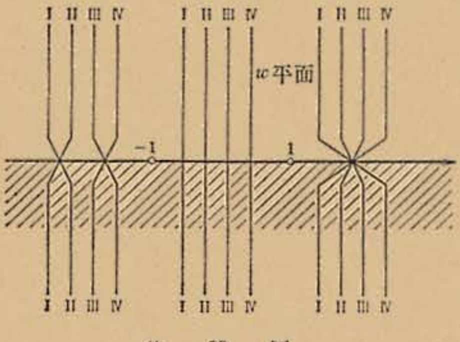
$$r^2-\frac{1}{r^2}=0\ \text{ および }\ \sin 2\theta=0$$

なる軌跡，すなわち

(17.12)
$$\text{(i)}\ \ r=1\ \text{ および }\ \text{(ii)}\ \ \theta=0,\ \frac{\pi}{2},\ \pi,\ \frac{3\pi}{2}$$




第 17 圖




第 18 圖

なる軌跡にうつり，これらの軌跡即ち單位圓と坐標軸とによって $z$ 平面は $2\times4=8$ 個の領域にわけられる．これらの 8 個の領域は $w$ 平面の上におかれた 4 葉の平面を實軸に沿う

て切斷して得られる 8 個の半平面の各々に一對一且つ等角に寫像されるもので，いわゆる函數 $w=f(z)$ の半基本領域である．

これらの半基本領域の番號づけは幾通りにもできるが，圖に一つの仕方が示してある．$w$ 平面の上の被覆面ではそれに相當するつなぎ方が第 18 圖のようになる．この Riemann 面は $w=1$ および $-1$ の上におのおの二つの一次の分岐點を，また $w=\infty$ の上にも一次の分岐點を二つもつことがわかる．

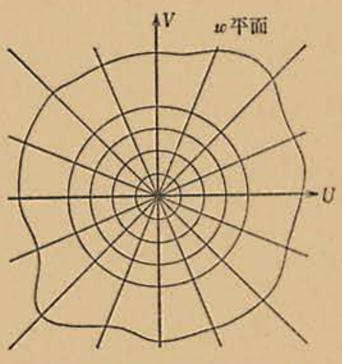
次にさらに精しく

$$w=f(z)=U+iV=e^{\zeta},\qquad \zeta=u+iv \tag{17.13}$$

とおいて，函數 $w$ による等角寫像を考えてみよう．

$$\begin{cases} |w|=\sqrt{U^2+V^2}=e^u, & \operatorname{arc} w=\tan^{-1}\dfrac{V}{U}=v, \\ U=e^u\cos v, & V=e^u\sin v \end{cases} \tag{17.14}$$

なる關係にある．$w$ 平面では曲線 $u=\text{const}$ は原點を中心とした圓，$v=\text{const}$ は原點からでる射線を表わし，これらによって $w$ 平面は第 19 圖のような網目にわけられる．いま原像の $w$ 平面では常にこの**圓，射線の網目**を考えることにすれば別にこれを示す必要はなく，ただ $z$ 平面に於けるその像がいかになるかを見ればよい．これを調べることによって函數の變動が明瞭にされる．圓の像即ち $z$ 平面に於ける曲線 $u(x,y)=\text{const}$ を**等高線**，射線の像即ち $z$ 平面に於ける曲線 $v(x,y)=\text{const}$ を**流線**，そしてこれらからできる $z$ 平面上の網目を**等高線流線の網目**とよぶ．これらは特異點を除いては至るところ直交するわけである．



第 19 圖 圓，射線の網目

さらにこの平面的な表わし方から次のようにして空間的表示にうつると，函數の變動は一層明瞭になる．即ち $z$ 平面の各點に於て $|w|$ に等しい長さの垂線をたてその端點をつなぐと一つの曲面が得られる．これを $f(z)$ の**浮だし**という．すると上に述べた等高線は即ちこの浮だしの等高線を $z$ 平面上に射影したものに他ならず，流線は浮だしに於てこれらの等高線と直交する．從って曲面上を最急降下する曲線即ち流線の $z$ 平面上の射影である．流線は無限遠または天に沖する極の高さから發して再び無限遠にかまたは最低地なる零點に流れ込むことを注意する．

$$v=\frac{k}{2}\pi\qquad (k=0,\pm1,\pm2,\cdots\cdots) \tag{17.15}$$

とおけば，$k$ が偶數のときの流線は $w$ 平面の實軸 $(V=0)$ の像で**實線**，$k$ が奇數のときの流線は $w$ 平面の虛軸 $(U=0)$ の像で**虛線**とよぶ．これだけを示しても大勢を知ることができる．$1/f(z)=$

$e^{-u}\cdot e^{-iv}$ であるから，等高線流線の網目では $f(z)$ の單純な極は單純な零點のように高位の極は高位の零點のように行動する．**交叉點**は網目における特異點で，そこでは等高線が交叉し從って流れは一時停滯的になる．特に一次の交叉點は浮だしではいわゆる**鞍部點**になっていて，直交する等高線の間の角を二等分して流線が流出入している（第 22 圖の $K$ 點の近傍のように）．

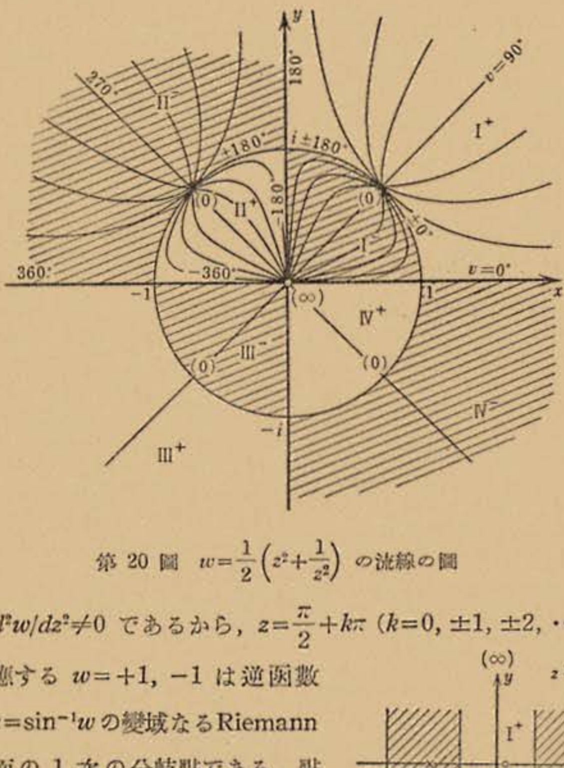
さて本例では，$w$ 平面の原點 $w=0$ の像は方程式

$$z^4+1=0$$

の根で

$$z=\pm e^{i\frac{\pi}{4}},\qquad \pm e^{i\frac{3\pi}{4}}$$

の 4 點である．また $w=\infty$ の像は $z=0$ および $\infty$ の 2 點である．よって $z$ 平面の各基本領域における流線は $w=0$ の像から發して $w=\infty$ の像に注ぎこむ圖のような曲線群となる．附記する $v$ の値には $2\pi$ の整數倍だけの不定性があるわけであるが，例えば圖のようになる．精しくは次式によって計算せねばならない．




第 20 圖 $w=\frac{1}{2}\left(z^2+\frac{1}{z^2}\right)$ の流線の圖

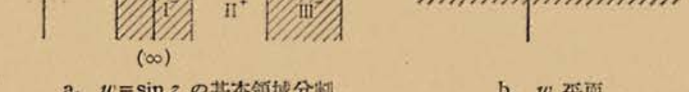
$$(27.16)\quad\begin{cases} e^u=\dfrac{1}{2}\sqrt{r^4+\dfrac{1}{r^4}+2\cos 4\theta}, \\ v=\tan^{-1}\left(\dfrac{r^4-1}{r^4+1}\tan 2\theta\right). \end{cases}$$

**例 3.** $w=\sin z=se^{i\sigma}$，$z=x+iy=re^{i\theta}$．

このときは

$$\frac{dw}{dz}=\cos z,\qquad \frac{d^2w}{dz^2}=-\sin z$$

で $z=\frac{\pi}{2}+k\pi$（$k$ は整數）にたいし $dw/dz=0$，$d^2w/dz^2\neq 0$ であるから，$z=\frac{\pi}{2}+k\pi$ ($k=0, \pm1, \pm2, \cdots$) は $w=\sin z$ の 1 次の交叉點であり，對應する $w=+1, -1$ は逆函數 $z=\sin^{-1}w$ の變域なる Riemann 面の 1 次の分岐點である．點 $w=\pm1$ の上に無數に多くの 1 次の分岐點が存在する．




a. $w=\sin z$ の基本領域分割　　b. $w$ 平面

第 21 圖

$w=\sin x\cosh y+i\cos x\sinh y$ で分岐點を結ぶ $w$ 平面の實軸は $z$ 平面の $\cos x\sinh y=0$ に

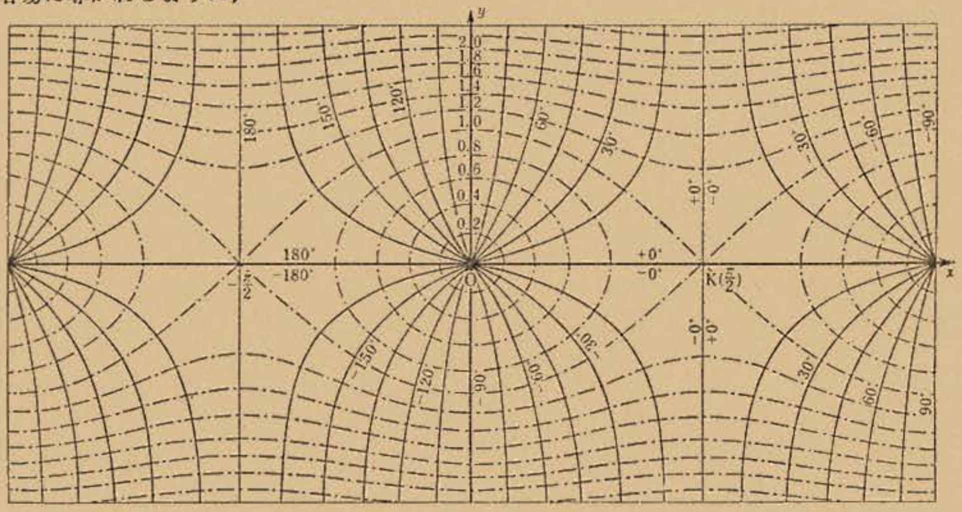
相當する $y$ 平行線 $x=\frac{\pi}{2}+k\pi$ と $x$ 軸 $y=0$ に寫像される．これにより $z$ 平面は第 21 圖 a のような半基本領域に分割される．

$|y|\to\infty$ なる路についてはつねに $w\to\infty$ で從って $w=\infty$ は逆函數 $\sin^{-1}w$ の超越特異點である．

さらに精しい等角寫像の模樣を見るには次の様な式を作っておくと便利である（$s=\mathrm{const}$ は等高線，$\sigma=\mathrm{const}$ は流線を與える）．

$$s^2=\sin^2 x+\sinh^2 y,\qquad \tan\sigma=\tanh y/\tan x$$

より容易に導かれるように，




第 22 圖　$w=\sin z$ の流線（實線）と等高線（破線）[1)]

$r<1$ のときは

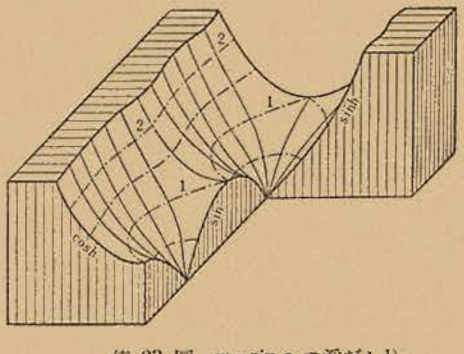
$$s=r-\frac{r^3}{6}\cos 2\theta+\frac{r^5}{144}\left(1+\frac{1}{5}\cos 4\theta\right)-\cdots,$$

$$\sigma=\theta-\frac{r^2}{6}\sin 2\theta-\frac{r^4}{180}\sin 4\theta-\cdots$$

$y>1$ のときは

$$s=\frac{1}{2}e^y-\frac{1}{2}e^{-y}\cos 2x+\frac{1}{8}e^{-3y}(1-\cos 4x)-\cdots,$$

$$\sigma=\frac{\pi}{2}-x-e^{-2y}\sin 2x-\frac{1}{2}e^{-4y}\sin 4x-\cdots$$




第 23 圖　$w=\sin z$ の浮だし[1)]

1) F. Emde, *Tafeln elementarer Funktionen*, 1948 より．

# 第2章　ガンマ函数

## §18. 歴　史

階乗の系列 $1!, 2!, 3!, \cdots\ s!, \cdots$ を補間すること即ち $s$ が自然数でない任意の正数のときの $s!$ を考えるため，1729 年 Goldbach への手紙の中で[1]，Euler は次のような變形を與えた．まず $s, n$ を任意の自然数とすると

$$(18.1)\qquad (s-1)!=\frac{1}{s}\cdot\frac{1\cdot 2\cdot\cdots\cdot(n-1)}{(s+1)(s+2)\cdot\cdots\cdot(s+n-1)}n^s\left[\frac{n}{n}\cdot\frac{n+1}{n}\cdot\cdots\cdot\frac{n+s-1}{n}\right]$$

と書かれこれに於て $s$ を固定し $n$ を $\infty$ にやると，角括弧の中は 1 に收斂するから

$$(18.2)\qquad (s-1)!=\lim_{n\to\infty}\frac{1\cdot 2\cdot\cdots\cdot(n-1)}{s(s+1)\cdot\cdots\cdot(s+n-1)}n^s$$

と書ける．しかるにこの右邊の中の式は，$s$ が任意の複素數値をとるとき全有限 $s$ 平面で定義される $s$ の有理型函數であるから，これで目的が達せられたわけである．さらに

$$n^s=\left(\frac{2}{1}\cdot\frac{3}{2}\cdot\cdots\cdot\frac{n}{n-1}\right)^s=\left(1+\frac{1}{1}\right)^s\left(1+\frac{1}{2}\right)^s\cdots\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^s$$

と書きかえると

$$(18.3)\qquad (s-1)!=\frac{1}{s}\lim_{n\to\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{1}\right)^s\left(1+\frac{1}{2}\right)^s\cdots\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^s}{\left(1+\frac{s}{1}\right)\left(1+\frac{s}{2}\right)\cdots\left(1+\frac{s}{n-1}\right)}=\frac{1}{s}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^s\left(1+\frac{s}{n}\right)^{-1}$$

となるが，この表示も Euler によって與えられた．Gauß は無限積によって新しい超越函數を定義するという方針を系統的に用いたのであるが，階乗函數にたいしては最後に Weierstrass により基準形

$$(18.4)\qquad (s-1)!=e^{-Cs}\frac{1}{s}\prod_{n=1}^{\infty}e^{\frac{s}{n}}\Big/\left(1+\frac{s}{n}\right)$$

が與えられた．これらの積表示によって函數の諸性質は最も容易に導かれる．

しかし應用に於ては

$$(18.5)\qquad \int_0^\infty e^{-t}t^{s-1}dt$$

なる積分がしばしば現われる．$s$ が自然数のときは積分の値はまた $(s-1)!$ に等しく，一方積分自身

---

1) Correspondance mathématique et physique de quelques célèbres géomètres du XVIIIème siècle (Saint-Pétersbourg, 1843), 1, 1–18 にのせられている．

は $\Re(s)>0$ なる任意の複素数 $s$ にたいし定まるから，これによっても始めに述べた目的が達せられるであろう．$e^{-t}=u$ とおけば積分は

$$\int_0^1\left(\ln\frac{1}{u}\right)^{s-1}du \tag{18.6}$$

となるが，積分はまずこの形でこれも Euler によって導入された．但し Euler は $s$ の有理数値についてのみ考えた．Legendre が始めて任意の正数値 $s$ にたいし定まる函数として考察しこれを $\Gamma(s)$ と記しガンマ函数とよんだ（但し積分そのものは第二種の Euler 積分とよんだ）．

以上 $(s-1)!$ の二つの補間はその考え方に於て全く別であるにかかわらず同等であることが示される．ここでは A. Pringsheim[1] の方針に従って，まず應用上最も重要な積分表示 (18.5) から出發する．しかしそれでは函數の定義域が限定されまた性質の證明にも不便なので，次にはそれが積表示を滿足することを證明しかくて諸公式の證明には積表示を用いることにしよう．

### §19. Euler の第二種の積分 $\Gamma(z)$ の正則性

まず實變數 $x$ にたいして積分

$$\Gamma(x)=\int_0^\infty e^{-t}t^{x-1}dt \tag{19.1}$$

を考える．この積分の異常性は被積分函數 $e^{-t}t^{x-1}$ の $t=0$ に於ける行動と $t\to\infty$ にたいする行動とからくる．そこでこれを

$$=\int_0^1 e^{-t}t^{x-1}dt+\int_1^\infty e^{-t}t^{x-1}dt \tag{19.2}$$

とわけて見る．始めの積分は $x>0$ にたいしてのみ收斂する．しかし後の積分の收斂は $x$ によらない．よって結局積分 $\Gamma(x)$ は $x>0$ にたいし收斂である．

さらにこの積分は區間 $0<x<\infty$ に於て**廣義一様收斂**である．それはこの區間に屬する任意の閉區間 $a\leqq x\leqq b$（よって $a>0$）に於て積分が一様收斂であることを意味するのであるが，それを示すには，いまは **De la Vallée-Poussin の $\mu(t)$ 判定法**："$\alpha\leqq\gamma\leqq t$ なる $t$ にたいして連續な正值函數 $\mu(t)$ があって，もし

(i) $|f(t,x)|\leqq\mu(t)$, $(\gamma\leqq t,\ a\leqq x\leqq b)$,

(ii) $\displaystyle\int_\gamma^\infty\mu(t)dt$ が收斂

であれば，積分 $\displaystyle\int_\alpha^\infty f(t,x)dt$ は $a\leqq x\leqq b$ に於て絕對且つ一様收斂である" を使えばよい．卽ち (19.2) の始めの積分にたいしては

[1] A. Pringsheim, *Zur Theorie der Gamma-Funktionen*. Math. Ann. **31** (1888), 455–481.

(19.3) $$e^{-t}t^{x-1}\leqq t^{a-1}\qquad(0<t\leqq 1),$$

後の積分にたいしては

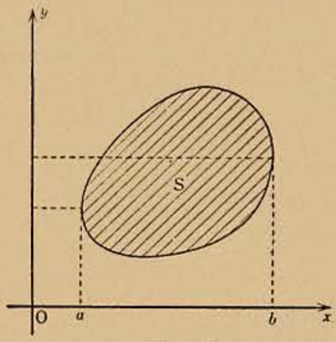
(19.4) $$e^{-t}t^{x-1}\leqq e^{-t}t^{b-1}\qquad(1\leqq t<\infty)$$

が成立つことを考えればよい．さて積分のこの一様收斂性から函數 $\Gamma(x)$ が區間 $a\leqq x\leqq b$ $(a>0)$ に於て連續であること，そしてこの區間は $a>0$ なる限り任意であったから結局(19.1)の積分 **$\Gamma(x)$ が定義域 $x>0$ に於て $x$ の連續函數であること**が従う．それは附錄 I 定理 4 にもとづく．次に $\Gamma(x)$ の微分可能性を調べるには，實變數の函數として附錄 I 定理 6 を用いるよりも，複素變數 $z$ の函數として

(19.5) $$\Gamma(z)=\int_0^\infty e^{-t}t^{z-1}dt$$

を考えた方がはやい．それは附錄 I 定理 9 を用いるのである．

積分 (19.5) を考えるに，正實軸 $0<t<\infty$ が附錄 I 定理 9 の曲線 $C$ にあたるが，いまは $t\to+\infty$ のみならず同時に $t\to+0$ も積分の異常性の原因であることを注意せねばならない．そこで領域 $D$ として半平面 $\Re(z)>0$ を，$C$ の部分曲線 $C'$ として線分 $c\leqq t\leqq d$ (但し $c$ は任意の正數) を考える．




第 24 圖

なお

$$t^{z-1}=e^{(z-1)\ln t}$$

としてはその主値をとる．そうすれば函數 $f(z,t)=e^{-t}t^{z-1}$ は $z\in D$, $t\in C'$ なる二變數 $(z,t)$ の函數として連續，$t$ を固定したとき $z\in D$ の函數として正則，最後に積分 (19.5) は $z\in D$ に於て廣義一様收斂である．この最後のことは，$D$ 即ち半平面 $\Re(z)>0$ 内に任意の有界閉領域 $S$ をとり $y$ 軸と $S$ との間の距離を $a>0$, $\sup_{z\in S}x=b$ として，$z=x+iy\in S$ にたいし

$$|t^{z-1}|=t^{x-1}$$

なることを考えれば，上に實變數の積分(19.1)について示したことから明らかである．かくして附錄 I 定理 9 および同注意により**積分 $\Gamma(z)$ は $\Re(z)>0$ に於て $z$ の正則函數を表わし**且つ

(19.6) $$\frac{d\Gamma(z)}{dz}=\int_0^\infty\frac{\partial}{\partial z}(e^{-t}t^{z-1})dt=\int_0^\infty e^{-t}t^{z-1}\ln t\,dt$$

の成立つことが明らかにされた．さらにこれを同様に微分することにより $\Gamma(z)$ の高階導函數が得られる

(19.7) $$\frac{d^n\Gamma(z)}{dz^n}=\int_0^\infty e^{-t}t^{z-1}(\ln t)^n dt.$$

## §20. $\Gamma$ 函數の無限積表示

次に無限積表示を積分 (19.5) から導くのに，解析接續法により任意の $z$ の場合に直せるから，こ

こではまず $z$ を實正數 $x$ としさらに $0<x\leqq 1$ と限定して考えることにする．すると部分積分により

$$\Gamma(x)=\int_0^\infty e^{-t}t^{x-1}dt$$

$$=\left[\frac{e^{-t}t^x}{x}\right]_{t=0}^\infty+\frac{1}{x}\int_0^\infty e^{-t}t^x dt=\frac{1}{x}\Gamma(x+1),$$

卽ち

(20.1) $$\Gamma(x+1)=x\Gamma(x)$$

なる關係が得られ，これを繰り返し用いると

(20.2) $$\Gamma(x+n)=x(x+1)\cdots\cdots(x+n-1)\Gamma(x)$$

が從う．これに於て特に $x=1$ とすれば

(20.3) $$\Gamma(1)=\int_0^\infty e^{-t}dt=1$$

であるから

(20.4) $$\Gamma(n+1)=n!$$

となる．いま (20.2) を

(20.5) $$\Gamma(x)=\frac{1}{x(x+1)\cdots\cdots(x+n-1)}\Gamma(x+n)$$

の形に書き，この $\Gamma(x+n)$ を

(20.6) $$\Gamma(x+n)=\int_0^n e^{-t}t^{n-1}t^x dt+\int_n^\infty e^{-t}t^{n-1}t^x dt$$

の様にわけて考えると，始めの積分に於ては

$$t^x\leqq n^x \quad \text{および} \quad t^x\geqq t\cdot n^{-1+x}$$

が成立ち（後の式は $x$ が 1 を超えない正數のとき $0\leqq t\leqq n$ にたいしては $\left(\frac{t}{n}\right)^x\geqq\frac{t}{n}$ なることから從う），後の積分に於ては

$$t^x\leqq t\cdot n^{-1+x} \quad \text{および} \quad t^x\geqq n^x$$

が成立つ．よって

$$\Gamma(x+n)\begin{cases} <n^x\int_0^n e^{-t}t^{n-1}dt+n^{-1+x}\int_n^\infty e^{-t}t^n dt, \\ >n^{-1+x}\int_0^n e^{-t}t^n dt+n^x\int_n^\infty e^{-t}t^{n-1}dt \end{cases}$$

或は

$$\frac{\Gamma(x+n)}{n^x}\begin{cases} <\int_0^n e^{-t}t^{n-1}dt+\frac{1}{n}\left(\int_0^\infty e^{-t}t^n dt-\int_0^n e^{-t}t^n dt\right), \\ >\frac{1}{n}\int_0^n e^{-t}t^n dt+\int_0^\infty e^{-t}t^{n-1}dt-\int_0^n e^{-t}t^{n-1}dt \end{cases}$$

が成立つ．ところで

$$\int_0^\infty e^{-t}t^{n-1}dt=\frac{1}{n}\int_0^\infty e^{-t}t^n dt=\Gamma(n)=(n-1)!,$$

$$\int_0^n e^{-t}t^{n-1}dt=\left[\frac{e^{-t}t^n}{n}\right]_0^n+\frac{1}{n}\int_0^n e^{-t}t^n dt,$$

$$\therefore\quad \int_0^n e^{-t}t^{n-1}dt-\frac{1}{n}\int_0^n e^{-t}t^n dt=\frac{n^{n-1}}{e^n}$$

であるから，結局

$$\text{(20.7)}\qquad \frac{\Gamma(x+n)}{n^x}\begin{cases} <(n-1)!+\dfrac{n^{n-1}}{e^n}, \\ >(n-1)!-\dfrac{n^{n-1}}{e^n}. \end{cases}$$

従って

$$\text{(20.8)}\qquad \Gamma(x+n)=(n-1)!\,n^x(1+\theta\varepsilon_n)$$

と書ける，ここに $-1<\theta<1$ で

$$\varepsilon_n=\frac{n^{n-1}}{(n-1)!\,e^n}=\frac{n^n}{n!\,e^n}$$

である．ところで (9.3) で示された $n!$ の見積りを使えば

$$\text{(20.9)}\qquad \frac{n!\,e^n}{n^n}=A(n)\sqrt{n}, \qquad 2.50<A(n)<2.72$$

であるから $\lim\limits_{n\to\infty}\varepsilon_n=0$ であることがわかる．かくて (20.5) に (20.8) を用いると

$$\Gamma(x)=\frac{1\cdot2\cdot\cdots\cdot(n-1)}{x(x+1)\cdot\cdots\cdot(x+n-1)}n^x(1+\theta\varepsilon_n),$$

$$-1<\theta<1, \qquad \lim_{n\to\infty}\varepsilon_n=0$$

が成立ち，従ってまず $0<x\leqq1$ にたいし

$$\text{(20.10)}\qquad \Gamma(x)=\frac{1}{x}\lim_{n\to\infty}\frac{1\cdot2\cdot\cdots\cdot(n-1)}{(x+1)(x+2)\cdot\cdots\cdot(x+n-1)}n^x$$

$$\text{(20.11)}\qquad =\frac{1}{x}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^x\left(1+\frac{x}{n}\right)^{-1}$$

と表わされることが證明せられた．

我々はこの無限積が，$x$ が任意の複素數値をとるときに，全有限 $x$ 平面で有理型な函數を表わすことを示そうと思う．それにはこれをさらに次のように變形する．$\lim\limits_{n\to\infty}n/(x+n)=1$ であるからいま

$$\text{(20.12)}\qquad \Gamma_n(x)\equiv\frac{1}{x}\cdot\frac{1\cdot2\cdot\cdots\cdot n}{(x+1)(x+2)\cdot\cdots\cdot(x+n)}n^x$$

とおけば

(20.13) $$\Gamma(x)=\lim_{n\to\infty}\Gamma_n(x)$$

と表わされ，この $\Gamma_n(x)$ を §14 の基準積表示を豫想して

(20.14) $$\Gamma_n(x)=e^{x\left(\ln n-1-\frac{1}{2}-\cdots\cdots-\frac{1}{n}\right)}\cdot\frac{1}{x}\cdot\frac{e^{\frac{x}{1}}}{1+\frac{x}{1}}\cdot\frac{e^{\frac{x}{2}}}{1+\frac{x}{2}}\cdots\cdots\frac{e^{\frac{x}{n}}}{1+\frac{x}{n}}$$

の様に書きなおして考える．

## §21. Euler の常數

まずこの式に現れた極限

(21.1) $$C=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots\cdots+\frac{1}{n}-\ln n\right)$$

が存在することを證明する．$C=0.57721\cdots\cdots$ を **Euler の常數**という．いま

(21.2) $$C_n'=1+\frac{1}{2}+\cdots\cdots+\frac{1}{n}-\ln n,\qquad C_n''=1+\frac{1}{2}+\cdots\cdots+\frac{1}{n}-\ln(n+1)$$

とおけばまず

$$C_n'-C_n''=\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)>0,\qquad \lim_{n\to\infty}(C_n'-C_n'')=0$$

である．しかるに (8.13) により

$$\begin{cases} C_n'-C_{n+1}'=\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)-\dfrac{1}{n+1}>0, \\ -C_n''+C_{n-1}''=\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)-\dfrac{1}{n}<0 \end{cases}$$

が成立つから $C_1'>C_2'>C_3'>\cdots\cdots$, $C_1''<C_2''<C_3''<\cdots\cdots$ で，従って

$$\lim_{n\to\infty}C_n'=\lim_{n\to\infty}C_n''=C$$

が存在する．

$C$ の値を算出するには系列 $\{C_n'\}$ または $\{C_n''\}$ は餘り適當ではない．いま

(21.3) $$C_n=1+\frac{1}{2}+\cdots\cdots+\frac{1}{n}-\ln\left(n+\frac{1}{2}\right)$$

とおくとこれは $C_n'$ と $C_n''$ の間にあるから同じく $C_n\to C$ $(n\to\infty)$ で，$C$ の算出にはこれを使うとよい．即ち (8.5) により

$$C_{n-1}-C_n=\ln\left(\frac{1+\dfrac{1}{2n}}{1-\dfrac{1}{2n}}\right)-2\cdot\frac{1}{2n}$$

$$=2\left(\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{(2n)^3}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{(2n)^5}+\cdots\cdots\right)$$

そして $C=C_n-(C_n-C_{n+1})-(C_{n+1}-C_{n+2})-\cdots\cdots$

(21.4) $$=\left[1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots\cdots+\frac{1}{n}-\ln\left(n+\frac{1}{2}\right)\right]-2\sum_{p=n+1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{(2p)^3}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{(2p)^5}+\cdots\cdots\right)$$

と書かれる．例えば $n=12$ とすると後の方の和をはぶいても $C$ の小数3位までが得られ，和 $\sum$ の最初の二つの項を考慮に入れると $C$ の小数 10 位まで正確な値が得られる[1]．

$$1+\frac{1}{2}+\cdots\cdots+\frac{1}{12}=3.10321\ \ 06782\ \ 10\cdots\cdots$$

$$\ln\frac{25}{2}=2.52572\ \ 86443\ \ 28\cdots\cdots$$

$$\frac{1}{12}\sum_{p=13}^{\infty}\frac{1}{p^3}=0.00026\ \ 62415\ \ 82\cdots\cdots$$

$$\frac{1}{80}\sum_{p=13}^{\infty}\frac{1}{p^5}=0.00000\ \ 01273\ \ 22\cdots\cdots$$

$$\frac{1}{448}\sum_{p=13}^{\infty}\frac{1}{p^7}=0.00000\ \ 00000\ \ 97\cdots\cdots$$

これより

(21.5) $$C=0.57721\ \ 56649.$$

なお後に有用な $C$ の積分表示を導くため次の定理を證明しておく．

**定理　函數 $f(t)$ は區間 $0<t<\infty$ に於て連續で 0 から $\infty$ まで積分可能であるとすれば**

(21.6) $$\lim_{n\to\infty}\int_0^\infty f(t)e^{-nt}dt=0.$$

**證明**

(21.7) $$F(\tau)=\int_0^\tau f(t)dt$$

とおけば函數 $F(\tau)$ は $0\leqq\tau<\infty$ に於て連續且つ有界である．いま

(21.8) $$|F(\tau)|\leqq A<\infty \qquad (0\leqq\tau<\infty)$$

とする．次に

(21.9) $$G(\tau)=n\int_0^\tau F(t)e^{-nt}dt+F(\tau)e^{-n\tau}$$

とおけば，いま述べた $F(t)$ の性質のため $G(\tau)$ は區間 $0\leqq\tau<\infty$ に於て連續，連續微分可能且つ有界な函數で

(21.10) $$G(0)=0, \qquad G(\infty)=n\int_0^\infty F(t)e^{-nt}dt.$$

---

1) Euler-Maclaurin の積分公式を用いて $C$ を算出する方法は，拙著「計算法」朝倉書店，274 頁を参照されたい

$$G'(\tau)=F'(\tau)e^{-n\tau}=f(\tau)e^{-n\tau}$$

であるから

(21.11) $$G(\tau)=\int_0^\tau f(t)e^{-nt}dt.$$

よって (21.10) により

(21.12) $$n\int_0^\infty F(t)e^{-nt}dt=\int_0^\infty f(t)e^{-nt}dt$$

が成立つ．(21.6) を示すにはこの式の左邊が $n\to\infty$ と共に $\to 0$ なることを示せばよい．

いま $\varepsilon$ を任意の正数とする．$F(0)=0$ で $F(\tau)$ は $0\leqq\tau<\infty$ で連續であるから十分小さい正数 $\delta$ をとれば

$$|F(t)|<\frac{1}{2}\varepsilon \qquad (0\leqq t\leqq\delta)$$

ならしめ得る．ところで

$$\begin{aligned}\left|n\int_0^\infty F(t)e^{-nt}dt\right|&=\left|n\int_0^\delta F(t)e^{-nt}dt+n\int_\delta^\infty F(t)e^{-nt}dt\right|\\&\leqq n\int_0^\delta |F(t)|e^{-nt}dt+n\int_\delta^\infty |F(t)|e^{-nt}dt\\&\leqq\frac{1}{2}\varepsilon(1-e^{-n\delta})+Ae^{-n\delta}\leqq\frac{\varepsilon}{2}+Ae^{-n\delta}.\end{aligned}$$

よって $N$ を $N\geqq\frac{1}{\delta}\ln\frac{2A}{\varepsilon}$ なる自然数とすれば

$$\left|n\int_0^\infty F(t)e^{-nt}dt\right|<\varepsilon, \qquad (n>N)$$

が成立つ．これで定理が證明された．

さて Euler の常数の積分表示を導くため

$$\frac{1}{n}=\int_0^\infty e^{-nt}dt$$

と表わすと

(21.13) $$1+\frac{1}{2}+\cdots\cdot+\frac{1}{n}=\int_0^\infty\frac{1-e^{-nt}}{e^t-1}dt$$

と書ける．一方 (7.10) により

(21.14) $$\ln(1+n)=\int_0^\infty\frac{1-e^{-nt}}{t}e^{-t}dt$$

が成立つから邊々引けば

(21.15) $$1+\frac{1}{2}+\cdots\cdot+\frac{1}{n}-\ln(1+n)=\int_0^\infty f(t)(1-e^{-nt})dt$$

と書ける．但し

$$f(t)\equiv\frac{1}{e^t-1}-\frac{e^{-t}}{t} \tag{21.16}$$

で，函数 $f(t)$ は $0<t<\infty$ に於て連續で 0 から $\infty$ まで積分可能であるから定理の假定が滿足され，従って $n\to\infty$ とすると求むる表示

$$C=\int_0^\infty\left(\frac{1}{e^t-1}-\frac{e^{-t}}{t}\right)dt \tag{21.17}$$

が得られる．

## §22.　ガンマ函數の基準積表示と主要公式

再び §20 の問題に歸り變數を複素數 $z$ として

$$\Gamma_n(z)=e^{z\left(\ln n-1-\frac{1}{2}-\cdots\cdots-\frac{1}{n}\right)}\cdot\frac{1}{z}\cdot\frac{e^{\frac{z}{1}}}{1+\frac{z}{1}}\cdot\frac{e^{\frac{z}{2}}}{1+\frac{z}{2}}\cdots\cdots\frac{e^{\frac{z}{n}}}{1+\frac{z}{n}} \tag{22.1}$$

の $n\to\infty$ にたいする收斂を考えよう．$\Gamma_n(z)$ は $z=0,-1,-2,\cdots,-n$ にそれぞれ一位の極，$z=\infty$ に眞性特異點をもつ有理型函數であるが，いまこれが全有限 $z$ 平面から $z=0,-1,-2,\cdots$ を除いた領域 $D$ に於て廣義一様收斂し従ってその極限函數は $D$ に於て正則（Weierstrass の定理により），従って $\Gamma(z)$ が全有限 $z$ 平面に於て有理型函數であることを證明しよう．まず §21 により因數 $e^{z\left(\ln n-1-\frac{1}{2}-\cdots\cdots-\frac{1}{n}\right)}$ が全 $z$ 平面に於て $e^{-Cz}$ に廣義一様收斂することは明らかであるから，殘りの無限積或はそのかわりに無限級數

$$\sum_{n=1}^\infty\left[\ln\left(1+\frac{z}{n}\right)-\frac{z}{n}\right] \tag{22.2}$$

が[1] $D$ に於て廣義一様收斂することを示せばよい．そのことは，$R$ を任意の正數とするとき自然數 $N$ を $>2R$ のようにとれば $n\geqq N$ なるすべての $n$ および $|z|\leqq R$ なるすべての $z$ にたいし常に $|z/n|\leqq\frac{1}{2}$ であるから，評價式 (8.10) により

$$\left|\ln\left(1+\frac{z}{n}\right)-\frac{z}{n}\right|\leqq\frac{R^2}{n^2}\qquad(n\geqq N>2R,\ |z|\leqq R) \tag{22.3}$$

が成立ち，ここに優級數

$$\sum_{n=N}^\infty\frac{R^2}{n^2}<\frac{\pi^2R^2}{6} \tag{22.4}$$

は收斂であるから，これで證明されたわけである．

さてここに導入された極限函數 $\lim\Gamma_n(z)$ をかりに $F(z)$ とすれば，$\Re(z)>0$ に於ては $F(z)$ は正則で，一方それは (20.10) でみたように，$z$ が $0<z\leqq1$ なる實數のとき積分 (19.5) で定義された同

1)　各項の對數はその主値をとるものとする．

じく $\Re(z)>0$ に於て正則なる $\Gamma(z)$ と一致するから，一致の定理により $\Re(z)>0$ に於て $F(z)\equiv\Gamma(z)$ が成立つ．その上に無限積

$$\Gamma(z)=e^{-Cz}\frac{1}{z}\prod_{n=1}^{\infty}\frac{e^{\frac{z}{n}}}{1+\frac{z}{n}} \tag{22.5}$$

が積分で導入された函數 $\Gamma(z)$ の $\Re(z)\leqq 0$ への**解析接續**を與えるものであることがわかったわけである．

いま (22.5) を

$$\frac{1}{\Gamma(z)}=e^{Cz}z\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)e^{-\frac{z}{n}} \tag{22.6}$$

と書けば，$\Gamma(z)$ の逆數が $z=0,-1,-2,\cdots$ にのみ零點をもつ**整函數**であることがわかる．從って指數函數と同じように，**$\Gamma(z)$ は決して 0 という値をとらない函數である**．(22.6) の表示は 1844 年 O. Schlömilch によって始めて與えられたのであるが，函數論に於けるその重要性を深く認識して超越整函數の積表示に關する一般定理にまで到達したのは Weierstrass[1] であった (§14. 參照).

さらに以上の說明から (20.10) の形も任意の複素數 $z$ に一般化されて

$$\Gamma(z)=\frac{1}{z}\lim_{n\to\infty}\frac{1\cdot2\cdot\cdots\cdot(n-1)}{(z+1)(z+2)\cdots(z+n-1)}n^z \tag{22.7}$$

$$=\frac{1}{z}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^z\left(1+\frac{z}{n}\right)^{-1} \tag{22.8}$$

が成立つ．これらを **Euler の公式**とよぶ．以下これらの積表示を用いてしばしば使われる $\Gamma(z)$ の有用な公式を證明しよう．

まず (20.12) の $\Gamma_n(x)$ の式で $x=1$ とおけば $\Gamma_n(1)=\dfrac{n}{n+1}$. よって

$$\Gamma(1)=1. \tag{22.9}$$

また

$$\Gamma_n(z+1)=\frac{1\cdot2\cdot\cdots\cdot n}{(z+1)(z+2)\cdots(z+n+1)}n^{z+1}=z\Gamma_n(z)\frac{n}{n+z+1}$$

と書けるから $n\to\infty$ として $\Gamma(z)$ の滿足する**定差方程式**

$$\Gamma(z+1)=z\Gamma(z) \tag{22.10}$$

が從う．さらに (22.9), (22.10) より次式がでる．

$$\Gamma(n+1)=n! \qquad (n=1,2,\cdots). \tag{22.11}$$

さてガンマ函數は定積分或は無限積として Euler によって導入せられたものであるが，それが他

1) K. Weierstrass, *Über die Theorie der analytischen Fakultäten*. Journal für Math., **51**. S. 1–60. 1856. Werke, Bd. I, S. 153–211.

の多くの解析函数例えば指数函数，三角函数，ベッセル函数等のようにある微分方程式の解として定義できないか，このことはその後多くの學者によって問題とせられたところである．遂に 1887 年になって O. Hölder[1] は $\Gamma(z)$ はいかなる代数微分方程式をも満たすことができないことを證明した．

しかし上に示されたように $\Gamma(z)$ は定差方程式 (22.10) を満足する．(22.9) は初期條件に相當する．しかしこの條件のみによってはこの方程式の解析解が一義的に定まらないことは，$E(z)$ を週期 1 で $E(1)=1$ をみたす任意の解析函数として函数 $g(z)=E(z)\Gamma(z)$ を考えて見れば明らかである．

しかし (22.7) により $\Gamma(z)$ は任意の $z$ にたいして

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\Gamma(z+n)}{\Gamma(n)n^z}=1 \tag{22.12}$$

なる**極限條件**をみたす．いまこれを條件に追加して

$$\begin{cases} F(z+1)-zF(z)=0, & (\mathrm{I}) \\ F(1)=1, & (\mathrm{II}) \\ \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{F(z+n)}{F(n)n^z}=1 & (\mathrm{III}) \end{cases} \tag{22.13}$$

を満足する全有限平面で有理型な函数を求めることにすれば，かかる解はガンマ函数以外にないことになる．なんとなれば (I),(II) から再び $F(n)=(n-1)!$ および $F(z+n)=z(z+1)\cdots\cdots(z+n-1)F(z)$ が従うが，これを用いて

$$\frac{1}{F(z)}=\frac{z(z+1)\cdots\cdots(z+n-1)}{(n-1)!\,n^z}\cdot\frac{(n-1)!\,n^z}{F(z+n)}$$

と書き $n\to\infty$ にやれば，(III) および (22.7) により

$$\frac{1}{F(z)}=\frac{1}{\Gamma(z)},\qquad \text{即ち}\qquad F(z)=\Gamma(z)$$

がでるからである．

次に (20.10) および (22.6) より

$$\frac{1}{\Gamma(1-z)}=-\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{\Gamma(-z)}=e^{-Cz}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{n}\right)e^{-\frac{z}{n}}$$

と書かれ，これと (22.6) との積をつくると

$$\frac{1}{\Gamma(z)}\cdot\frac{1}{\Gamma(1-z)}=z\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{n^2}\right). \tag{22.14}$$

そこで (14.5) をみれば

---

1) O. Hölder, *Über die Eigenschaft der Gammafunktion keiner algebraischen Differentialgleichung zu genügen*, Math. Ann. **28** (1887), 1–13. その後 E. H. Moore, *Concerning Transcendentally Transcendental Functions*, Math. Ann. **48** (1897), 49–74. F. Hausdorff, *Zum Hölderschen Satz über $\Gamma(x)$*, Math. Ann. **93** (1925), 244–247 および A. Ostrowski, *Zum Hölderschen Satz über $\Gamma(x)$*, Math. Ann. **93** (1925), 248–251 の別證明がある．

(22.15)
$$\Gamma(z)\Gamma(1-z)=\frac{\pi}{\sin \pi z}$$

が成立つことがわかる．これをガンマ函数の**相補定理**とよぶ．これに於て $z=\dfrac{1}{2}$ とおけば

(22.16)
$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$$

がでる．さらに $\Gamma\left(-\dfrac{1}{2}\right)=-2\sqrt{\pi}$，$\Gamma\left(\dfrac{3}{2}\right)=\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$ がでる．

(22.15) からまた

(22.17)
$$\Gamma\left(\frac{1}{2}+z\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}-z\right)=\frac{\pi}{\cos \pi z}$$

が従う．もし $z$ が純虚数であれば

(22.18)
$$\Gamma(1+yi)\Gamma(1-yi)=|\Gamma(1+yi)|^2=\frac{\pi y}{\sinh \pi y},$$

(22.19)
$$\Gamma\left(\frac{1}{2}+yi\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}-yi\right)=\left|\Gamma\left(\frac{1}{2}+yi\right)\right|^2=\frac{\pi}{\cosh \pi y}.$$

**問 1.**　$(2n)!=2^{2n}n!\,\Gamma\left(n+\dfrac{1}{2}\right)\Big/\sqrt{\pi}$ を證明せよ．

**問 2.**　$|\Gamma(iy)|=\sqrt{\dfrac{\pi}{y\sinh \pi y}}$ を證明せよ．

**問 3.**　§14 の Hadamard の定理によって整函數 $1/\Gamma(z)$ の基準積表示を導け．

## §23.　Hankel の積分表示

積分表示 (19.5) は全有限平面で有理型函數なる $\Gamma(z)$ にたいして $\Re(z)>0$ でしか適用できない．これにたいし全 $z$ 平面で適用されるような積分表示が 1864 年 Hankel[1] によって與えられた．(19.5) に於て $\Re(z)\leqq 0$ が許せないのは積分の下端 $t=0$ に於ける積分の發散に原因する．よって Cauchy の積分定理にもとづいて $t=0$ を迂廻するような路をとればよいであろう．

いま $e^{-t}$ の展開式を

(23.1)
$$e^{-t}=\sum_{s=1}^{\infty}\frac{(-t)^{s-1}}{(s-1)!}=\sum_{s=1}^{\infty}\frac{(-t)^{s-1}}{\Gamma(s)}$$

と書けば，Cauchy の積分公式により

(23.2)
$$\frac{1}{\Gamma(s)}=\frac{-1}{2\pi i}\int_C e^{-t}(-t)^{-s}dt$$

と表わされる．ここに $C$ として $t=0$ のまわりを正の向きに一廻わりする任意の單純閉正則曲線をとってよい．いま $C$ が正實軸をきる點を $P$ として $P$ を $+\infty$ にやれば被積分函數の因数 $e^{-t}$ のために無限積分は收斂する．よって $C$ を正實軸上の無限遠から出發して原點を正の向きに一周し再び正

1) Zeitschrift für Math. u. Phys. **9** (1864), 7.

實軸に沿うて無限遠にもどるような路としてもよい.

そこで $z$ を任意の複素数としてこの積分路 $C$ に沿うてとった積分

(23.3)
$$f(z)=\int_C e^{-t}(-t)^z dt$$

について考えてみる. $z$ が負整数 $-s$ であれば上にみたように $f(-s)=-2\pi i/\Gamma(s)$ である. $z$ が任意のときは

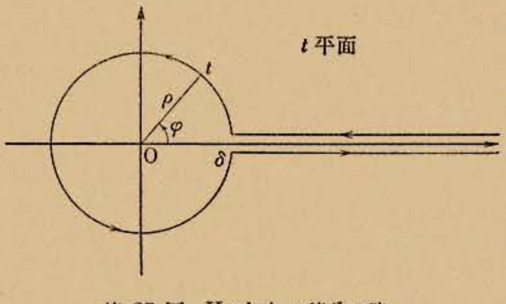
(23.4)
$$(-t)^z=e^{z\ln(-t)}$$

は $t$ の多價函數となるが, 以下に於ては $\ln(-t)$ の主値, 即ち $t$ が負の實數のとき $\ln(-t)$ が實數であるような分枝をとって考えることにする. そうすると無限積分 (23.3) は全有限 $z$ 平面に於て廣義一様收斂で從ってそこで正則即ち $f(z)$ は $z$ の整函數であることがいえる. それはいまや (23.3) の收斂に關し問題となるのは $t\to\infty$ に際しての行動だけであるが, いま $z$ 平面上にとった任意の有界閉領域 $S$ にたいし, $\sup_{z\in S}\Re(z)=b$ として, 積分を

$$\int^{\infty} e^{-t}t^{b-1}dt$$

と比較してみれば, $S$ に於ける一様收斂が明らかであるからである.

次に積分路を變形して, $\delta$ を任意の正數としたとき $+\infty$ から $t=\delta$ に到着しそれから原點のまわりを半徑 $\delta$ の圓に沿うて一周して再び $t=\delta$ にもどりそれから正實軸に沿うて $+\infty$ にもどるとして, 積分 (23.3) を計算してみよう.



第 25 圖　Hankel の積分の路

(23.5)
$$t=\rho e^{i\varphi}$$

とおくと $\ln(-t)$ の値は一般に $\ln\rho+i\{\varphi+(2n-1)\pi\}$ であるが, 上に定めたように, $t$ が負數のとき即ち $\varphi$ が $\pi$ なるときに實數となる分枝では $n=0$ でなければならないから

(23.6)
$$\ln(-t)=\ln\rho+i(\varphi-\pi)$$

となる. よって $t=+\infty$ から $\delta$ まででは ($\varphi=0$ として)

$$\ln(-t)=\ln\rho-i\pi,$$

$t=\delta$ から $+\infty$ まででは ($\varphi=2\pi$ として)

$$\ln(-t)=\ln\rho+i\pi$$

とおかねばならない. 從って實軸に沿うての積分は

$$\int_{\infty}^{\delta} e^{-\rho+z(\ln\rho-i\pi)}d\rho+\int_{\delta}^{\infty} e^{-\rho+z(\ln\rho+i\pi)}d\rho$$

$$=(e^{i\pi z}-e^{-i\pi z})\int_{\delta}^{\infty}e^{-\rho}\rho^{z}d\rho$$

$$=2i\sin\pi z\int_{\delta}^{\infty}e^{-\rho}\rho^{z}d\rho$$

となる．最後に圓の上では，$z=x+iy$ とおくとき

$$|(-t)^{z}|=|e^{z(\ln\delta+i(\varphi-\pi))}|=e^{x\ln\delta-y(\varphi-\pi)}$$

$$=O(\delta^{x})$$

で，圓周の長さは $2\pi\delta$ であるから，圓に沿うての積分は $O(\delta^{x+1})$ であることがわかる．從って $x>-1$ ならば $\delta\to0$ とともに 0 に行く．よって $\delta\to0$ ならしめると，まず $\Re(z)>-1$ にたいして

$$f(z)=2i\sin\pi z\int_{0}^{\infty}e^{-\rho}\rho^{z}d\rho$$

$$=2i\sin\pi z\,\Gamma(z+1) \tag{23.7}$$

が成立つことがわかった．しかるに全有限 $z$ 平面で左邊の $f(z)$ は正則，また $\Gamma(z+1)$ は $z=-1, -2,\cdots$ で一位の極をもつが $\sin\pi z$ が同じ點で一位の零をもつため特異性は消されて右邊も全有限 $z$ 平面で正則，よって關係 (23.7) は全 $z$ 平面で成立つわけである．$z$ の代わりに $z-1$ とおけば

$$\Gamma(z)=-\frac{1}{2i\sin\pi z}\int_{+\infty}^{(0+)}e^{-t}(-t)^{z-1}dt. \tag{23.8}$$

これが **Hankel の公式**である．なお相補定理により

$$\frac{1}{\Gamma(z)}=\frac{\Gamma(1-z)\sin\pi z}{\pi}$$

であるが，この右邊の $\Gamma(1-z)$ を (23.8) で表わせば

$$\frac{1}{\Gamma(z)}=\frac{i}{2\pi}\int_{+\infty}^{(0+)}e^{-t}(-t)^{-z}dt \tag{23.9}$$

なる表示が得られる ((23.2) の一般化).

## §24. Gauss の $\Psi$ 函數

これは

$$\Psi(z)\equiv\frac{d}{dz}\ln\Gamma(z)=\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} \tag{24.1}$$

と定義される．(22.10) により $\Psi(z)$ は次の定差方程式を滿足する．

$$\Psi(z+1)-\Psi(z)=\frac{1}{z}. \tag{24.2}$$

いま $\Gamma(z)$ の基準積 (22.5) の對數をとれば

$$\ln\Gamma(z)=-Cz-\ln z+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{z}{n}-\ln\left(1+\frac{z}{n}\right)\right] \tag{24.3}$$

を得[1)]，この無限級数は (22.2) で調べたように全有限 $z$ 平面から $z=0,-1,-2,\cdots\cdots$ を除いた領域 $D$ に於て廣義一様收斂であるから，Weierstrass の定理により微分は項毎に行われ

$$\Psi(z)=-C-\frac{1}{z}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{n}-\frac{1}{n+z}\right] \tag{24.4}$$

が成立つ．そしてこの右邊の級数はまた $D$ に於て廣義一様收斂で，再び項毎微分して

$$\frac{d\Psi}{dz}=\frac{d^2}{dz^2}\ln\Gamma(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+z)^2} \tag{24.5}$$

が得られる．(24.4) で $z=1$ とおけば

$$\Psi(1)=-C-1+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$

$$=-C-1+\lim_{m\to\infty}\sum_{n=1}^{m}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right),$$

$$\therefore\quad \Psi(1)=-C. \tag{24.6}$$

従って (22.9) により

$$\Gamma'(1)=-C \tag{24.7}$$

である．次に $\Gamma(z)$ にたいする極限條件 (22.12) の收斂はまた領域 $D$ に於て廣義一様であるから，いまその廣義一様收斂系列の ln の微係數を作れば，Weierstrass の定理により

$$\frac{d}{dz}\ln\left(\lim_{n\to\infty}\frac{\Gamma(z+n)}{\Gamma(n)n^z}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{d}{dz}\ln\left(\frac{\Gamma(z+n)}{\Gamma(n)n^z}\right)=0 \tag{24.8}$$

の様に計算ができ，これは $\Psi(z)$ にたいする極限條件

$$\lim_{n\to\infty}[\Psi(z+n)-\ln n]=0 \tag{24.9}$$

を與える．これは非齊次な條件であるが，いま (24.2) から得られる關係

$$\Psi(n+1)-\Psi(1)=\sum_{r=1}^{n}\frac{1}{r} \tag{24.10}$$

および初期條件 (24.6) を考慮して書きなおせば，

$$\lim_{n\to\infty}\left[\Psi(z+n)-\Psi(n+1)+\sum_{r=1}^{n}\frac{1}{r}-\ln n-C\right]=0$$

より齊次な條件

$$\lim_{n\to\infty}[\Psi(z+n)-\Psi(n+1)]=0 \tag{24.11}$$

がでる．するとガンマ函數の場合と同様にして $\Psi(z)$ が條件

$$\left\{\begin{array}{ll} F(z+1)-F(z)=\dfrac{1}{z}, & (\mathrm{I}) \\ F(1)=-C, & (\mathrm{II}) \\ \lim\limits_{n\to\infty}[F(z+n)-F(n+1)]=0 & (\mathrm{III}) \end{array}\right. \tag{24.12}$$

1) この右邊にある對數はすべてその主値をとるものとする．$\ln\Gamma(z)$ はそのような和としてまた主値を表わす．

または條件

(24.13)
$$\begin{cases} F(z+1)-F(z)=\dfrac{1}{z}, & (\mathrm{I}) \\ \lim\limits_{n\to\infty}[F(z+n)-\ln n]=0 & (\mathrm{I}^*) \end{cases}$$

を滿足する全有限平面で有理型な函數として唯一に定まることがいえる．

次に $\Re(z)>0$ であれば

(24.14)
$$\frac{1}{n+z}=\int_0^\infty e^{-t(n+z)}dt \qquad (n=0,1,2,\cdots\cdots)$$

と表わされるが，これを用いて $\Psi(z)$ の一つの積分表示を導こう．

(24.4) にこの表示を入れると

$$\Psi(z)=-C-\int_0^\infty e^{-tz}dt+\lim_{m\to\infty}\sum_{n=1}^{m}\left[\int_0^\infty(e^{-nt}-e^{-t(n+z)})dt\right]$$
$$=-C+\lim_{m\to\infty}\int_0^\infty\left[\sum_{n=1}^{m}e^{-nt}-\sum_{n=0}^{m}e^{-t(n+z)}\right]dt$$
$$=-C+\lim_{m\to\infty}\int_0^\infty\frac{e^{-t}-e^{-(m+1)t}-e^{-zt}+e^{-(z+m+1)t}}{1-e^{-t}}dt.$$

これに (21.17) で與えた $C$ の積分表示を用いると

$$\Psi(z)=\int_0^\infty\left(\frac{e^{-t}}{t}-\frac{e^{-zt}}{1-e^{-t}}\right)dt-\lim_{m\to\infty}\int_0^\infty\frac{1-e^{-zt}}{1-e^{-t}}e^{-(m+1)t}dt.$$

ところで $\lim\limits_{t\to0}\dfrac{1-e^{-zt}}{1-e^{-t}}=1$ であるから $\left|\dfrac{1-e^{-zt}}{1-e^{-t}}\right|$ は $0\leqq t\leqq1$ に於て有界である．また $t\geqq1$ にたいしては

$$\left|\frac{1-e^{-zt}}{1-e^{-t}}\right|\leqq\frac{1+|e^{-zt}|}{1-e^{-1}}\leqq\frac{2}{1-e^{-1}}$$

で，結局 $0\leqq t<\infty$ で

$$\left|\frac{1-e^{-zt}}{1-e^{-t}}\right|\leqq M$$

とおさえる常數 $M$ がある．よって

$$\left|\int_0^\infty\frac{1-e^{-zt}}{1-e^{-t}}e^{-(m+1)t}dt\right|\leqq M\int_0^\infty e^{-(m+1)t}dt=\frac{M}{m+1}\to0 \quad (m\to\infty)$$

が成立つ．かくて **Gauss の公式**

(24.15)
$$\Psi(z)=\frac{d}{dz}\ln\Gamma(z)=\int_0^\infty\left(\frac{e^{-t}}{t}-\frac{e^{-zt}}{1-e^{-t}}\right)dt, \quad (\Re z>0)$$

が證明された．

いま (24.15) の後の方の積分に $t=\ln(1+u)$ なる變換を行えば，**Dirichlet の公式**

(24.16)
$$\Psi(z)=\frac{d}{dz}\ln\Gamma(z)=\int_0^\infty\left(e^{-t}-\frac{1}{(1+t)^z}\right)\frac{dt}{}$$

が得られる．しかし (24.15) の中の二つの積分は，別々では $t=0$ にたいし發散するのであるから，上の手續には疑問があるわけであるが，次のようにして結果の正しいことが示される．(24.15) は

$$\Psi(z)=\lim_{\delta\to0}\int_\delta^\infty\left(\frac{e^{-t}}{t}-\frac{e^{-zt}}{1-e^{-t}}\right)dt$$

を意味するが，この中の第二の積分には上の手續が許され，$\varepsilon=e^\delta-1$ とおけば

$$=\lim_{\delta\to0}\left\{\int_\delta^\infty\frac{e^{-t}}{t}dt-\int_\varepsilon^\infty\frac{du}{u(1+u)^z}\right\}$$

$$=\lim_{\delta\to0}\left\{\int_\delta^\varepsilon\frac{e^{-t}}{t}dt+\int_\varepsilon^\infty\left(\frac{e^{-t}}{t}-\frac{1}{t(1+t)^z}\right)dt\right\}.$$

しかし

$$0<\int_\delta^\varepsilon\frac{e^{-t}}{t}dt<\int_\delta^\varepsilon\frac{dt}{t}=\ln\frac{e^\delta-1}{\delta}\to0\qquad(\delta\to0)$$

であるから

$$\Psi(z)=\lim_{\varepsilon\to0}\int_\varepsilon^\infty\left(e^{-t}-\frac{1}{(1+t)^z}\right)\frac{dt}{t}.\qquad\text{(證明了)}$$

**問 1.** (24.15) を用いて次式を證明せよ．

$$\Psi(z+1)=\frac{1}{2z}+\ln z-\int_0^\infty\left(\frac{1}{2}\coth\frac{1}{2}t-\frac{1}{t}\right)e^{-zt}dt.$$

## §25. $\ln\Gamma(z)$ にたいする Binet の公式

1839 年 Binet[1] は $|z|\to\infty$ にたいする $\ln\Gamma(z)$ の行動を明らかにするため重要な二つの公式を與えた．第一の公式を導くため (24.15) に於て $z$ の代わりに $z+1$ とおいた式

$$\frac{d}{dz}\ln\Gamma(z+1)=\int_0^\infty\left(\frac{e^{-t}}{t}-\frac{e^{-zt}}{e^t-1}\right)dt \tag{25.1}$$

から出發しよう．手掛りを得るため (9.3) の對數

$$\ln\Gamma(n+1)=\ln A(n)+\left(n+\frac{1}{2}\right)\ln n-n$$

の $n$ を連續的變數と見做して微分すれば

$$\frac{d}{dn}\ln\Gamma(n+1)=\ln n+\frac{1}{2n}+\frac{d}{dn}\ln A(n)$$

が生ずるから，この最初の二項に相當する $\ln z+\dfrac{1}{2z}$ を (25.1) から取りだす．そして (7.10) を用いて

$$\ln z=\int_0^\infty\frac{e^{-t}-e^{-zt}}{t}dt\qquad(\Re(z)>0) \tag{25.2}$$

1) J. Binet, *Mémoire sur les intégrales Eulériennes et sur leur application à la théorie des suites, ainsi qu'à l'évaluation des fonctions de grands nombles.* Journal de l'École Polytechn. cahier **27**, p. 123–343; 1839. Comptes rendus Bd. **9**, p. 39–45; 1839.

および

(25.3)
$$\frac{1}{2z}=\int_0^\infty \frac{1}{2}e^{-zt}dt \qquad (\Re(z)>0)$$

と書きかえると，(25.1) は

(25.4)
$$\frac{d}{dz}\ln\Gamma(z+1)=\ln z+\frac{1}{2z}-\int_0^\infty\left(\frac{1}{e^t-1}+\frac{1}{2}-\frac{1}{t}\right)e^{-zt}dt$$

と書かれる．この積分に於て $t\to 0$ にたいし

(25.5)
$$\frac{1}{e^t-1}+\frac{1}{2}-\frac{1}{t}=O(t)$$

であるから積分の下端は異常點ではない．そして無限積分は明らかに $\Re(z)>0$ なる半平面 $D$ に於て廣義一様收斂であるから，附錄 I 定理4により，(25.4) を $z$ について $z=1$ から $D$ の一點 $z$ まで積分するのに，積分の記號下で行ってよい．かくして ($\ln\Gamma(2)=0$ であるから)

$$\ln\Gamma(z+1)=\left(z+\frac{1}{2}\right)\ln z-z+1+\int_0^\infty\left(\frac{1}{e^t-1}+\frac{1}{2}-\frac{1}{t}\right)\frac{e^{-zt}-e^{-t}}{t}dt$$

を得る．これに於て，$t\to 0$ のとき

(25.6)
$$\left(\frac{1}{e^t-1}+\frac{1}{2}-\frac{1}{t}\right)\frac{1}{t}=O(1)$$

であるから，積分の下端は異常點でなく從って積分を次のように二つにわけることができる．なお $\ln\Gamma(z+1)=\ln z+\ln\Gamma(z)$ を入れて

(25.7)
$$\ln\Gamma(z)=\left(z-\frac{1}{2}\right)\ln z-z+1+\int_0^\infty\left(\frac{1}{e^t-1}+\frac{1}{2}-\frac{1}{t}\right)\frac{e^{-zt}}{t}dt$$
$$-\int_0^\infty\left(\frac{1}{e^t-1}+\frac{1}{2}-\frac{1}{t}\right)\frac{e^{-t}}{t}dt$$

と書き，この第二の積分を求めるため Pringsheim に從って

$$\int_0^\infty\left(\frac{1}{e^t-1}+\frac{1}{2}-\frac{1}{t}\right)\frac{e^{-t}}{t}dt=I, \qquad \int_0^\infty\left(\frac{1}{e^t-1}+\frac{1}{2}-\frac{1}{t}\right)\frac{e^{-\frac{1}{2}t}}{t}dt=J$$

とおく．すると (25.7) に於て $z=\dfrac{1}{2}$ とおくことにより，(22.16) を用いてまず

$$\frac{1}{2}\ln\pi=\frac{1}{2}+J-I$$

なる關係が得られる．次に $I=\displaystyle\int_0^\infty\left(\frac{1}{e^{\frac{1}{2}t}-1}+\frac{1}{2}-\frac{2}{t}\right)\frac{e^{-\frac{1}{2}t}}{t}dt$ と書けるから

$$J-I=\int_0^\infty\left(\frac{1}{t}-\frac{e^{\frac{1}{2}t}}{e^t-1}\right)\frac{e^{-\frac{1}{2}t}}{t}dt$$
$$=\int_0^\infty\left(\frac{e^{-\frac{1}{2}t}}{t}-\frac{1}{e^t-1}\right)\frac{1}{t}dt.$$

よって

$$J=\int_0^\infty\left\{\frac{e^{-\frac{1}{2}t}}{t}-\frac{1}{e^t-1}+\frac{e^{-t}}{e^t-1}+\frac{1}{2}e^{-t}-\frac{e^{-t}}{t}\right\}\frac{dt}{t}$$

$$=\int_0^\infty\left\{\frac{e^{-\frac{1}{2}t}-e^{-t}}{t}-\frac{1}{2}e^{-t}\right\}\frac{dt}{t}$$

$$=\int_0^\infty\left\{-\frac{d}{dt}\left(\frac{e^{-\frac{1}{2}t}-e^{-t}}{t}\right)-\frac{\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}t}-e^{-t}}{t}-\frac{e^{-t}}{2t}\right\}dt$$

$$=-\left[\frac{e^{-\frac{1}{2}t}-e^{-t}}{t}\right]_0^\infty+\frac{1}{2}\int_0^\infty\frac{e^{-t}-e^{-\frac{1}{2}t}}{t}dt$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\ln\frac{1}{2}.$$

よって

$$I=1-\frac{1}{2}\ln(2\pi). \tag{25.8}$$

この値を (25.7) に入れる．かくて $\Re(z)>0$ にたいし成立つ **Binet の第一の公式**

$$\ln\Gamma(z)=\left(z-\frac{1}{2}\right)\ln z-z+\frac{1}{2}\ln(2\pi)+\int_0^\infty\left(\frac{1}{e^t-1}+\frac{1}{2}-\frac{1}{t}\right)\frac{e^{-zt}}{t}dt \tag{25.9}$$

が得られた[1]．

この公式から導かれる重要な性質は，(25.6) により $t\geqq 0$ にたいし

$$\left|\left(\frac{1}{e^t-1}+\frac{1}{2}-\frac{1}{t}\right)\frac{1}{t}\right|\leqq K$$

とすれば，$\Re(z)=x>0$ にたいし

$$\left|\ln\Gamma(z)-\left(z-\frac{1}{2}\right)\ln z+z-\frac{1}{2}\ln(2\pi)\right|\leqq K\int_0^\infty e^{-xt}dt \tag{25.10}$$

$$=\frac{K}{x}$$

が成立ち，従って $x>0$ が大なるとき

$$\ln\Gamma(z)\sim\left(z-\frac{1}{2}\right)\ln z-z+\frac{1}{2}\ln(2\pi) \tag{25.11}$$

或は

---

1) (13.17) を想起すれば $\Re(z)>0$ なる $z$ にたいする Stirling の漸近級数はこれよりただちに得られる．しかしこの式では誤差を見積ることは困難であるし，また Stirling の漸近展開が $|\theta|<\frac{\pi}{2}$ にたいしてのみならず $|\theta|<\pi$ にたいして成立つことを示すのには別な考慮が必要である．Nielsen によれば $|\theta|<\pi$ に於て成立つことの注意は 1889 年 Stieltjes によって始めて與えられたという．我々は §27, §28 および §30 に於てこの一般な結果が直接に従うような方法を與えよう．

(25.12)
$$\Gamma(z+1)\sim\sqrt{2\pi}\,z^{z+\frac{1}{2}}e^{-z}$$

なることがわかることである．

次に Binet の第二の公式を導くため，(24.5) の公式

(25.13)
$$\frac{d^2}{dz^2}\ln\Gamma(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(z+n)^2}$$

から出發しよう．まず Plana の定理によって和を積分に直す．**Plana の定理**[1]とは，$x_1<x_2$ **が整數で函數** $\varphi(\zeta)$ **が** $x_1\leqq\Re(\zeta)\leqq x_2$ **なるすべての** $\zeta$ **の値にたいし有界正則であるならば關係**

(25.14)
$$\frac{1}{2}\varphi(x_1)+\varphi(x_1+1)+\varphi(x_1+2)+\cdots\varphi(x_2-1)+\frac{1}{2}\varphi(x_2)$$
$$=\int_{x_1}^{x_2}\varphi(\zeta)d\zeta+\frac{1}{i}\int_0^{\infty}\frac{\varphi(x_2+iy)-\varphi(x_1+iy)-\varphi(x_2-iy)+\varphi(x_1-iy)}{e^{2\pi y}-1}dy$$

**が成立つ**というのである．いま

$$\varphi(\zeta)\equiv\frac{1}{(z+\zeta)^2}$$

とおけば，$\Re(z)>0$ のとき $\varphi(\zeta)$ は $0\leqq\Re(\zeta)<\infty$ なるすべての $\zeta$ にたいし有界正則なる條件を滿足するから定理が適用できる．かくて $x_1=0$, $x_2=n\to\infty$ として

(25.15)
$$\frac{d^2}{dz^2}\ln\Gamma(z)=\frac{1}{2z^2}+\int_0^{\infty}\frac{1}{(z+t)^2}dt-2\int_0^{\infty}\frac{q(t,z)}{e^{2\pi t}-1}dt$$
$$+2\lim_{n\to\infty}\int_0^{\infty}\frac{q(t,z+n)}{e^{2\pi t}-1}dt.$$

但し

(25.16)
$$q(t,z)\equiv\frac{1}{2i}\left\{\frac{1}{(z+it)^2}-\frac{1}{(z-it)^2}\right\}$$

である．ところで

$$|q(t,z+n)|=\frac{1}{2}\left|\frac{4(z+n)t}{\{(z+n)^2+t^2\}^2}\right|$$

に於て

$$|(z+n)^2+t^2|^2=|(x+n)^2-y^2+t^2+2i(x+n)y|^2$$
$$=[(x+n)^2-y^2+t^2]^2+4(x+n)^2y^2$$

なる値は，$z$ が $\Re(z)>0$ 内の任意の有界閉領域にあるとき $n$ が十分大になれば

$$>[(x+n)^2-y^2]^2+4(x+n)^2v^2$$

---

[1] G. A. A. Plana, *Sur une nouvelle expression analytique des nombres Bernoulliens, propre à exprimer en termes finis la formule gênêrale pour la sommation des suites*. Mem. Acc. Torino (1) **25**, 403–418 (1820). 證明は $x_1$, $x_2$, $x_2\pm iR$, $x_1\pm iR$ を頂點とする矩形に沿うて (但し角を避けて) とられた積分 $\int\frac{\varphi(z)dz}{e^{\pm2\pi iz}-1}$ を考え $R\to+\infty$ ならしめて得られる．

$$=[(x+n)^2+y^2]^2=|z+n|^4$$

をみたすから，見積り

$$|q(t,z+n)|\leqq\frac{2t}{|z+n|^3}\leqq\frac{2t}{n^3}$$

が成立つ．よって (25.15) の最後の積分の極限は 0 で，關係 (25.15) は

$$\frac{d^2}{dz^2}\ln\Gamma(z)=\frac{1}{2z^2}+\frac{1}{z}+\int_0^\infty\frac{4zt}{(z^2+t^2)^2}\frac{dt}{2^{2\pi t}-1} \tag{25.17}$$

となる．この最後の積分に於て上と同様に見積ると

$$\left|\frac{4zt}{(z^2+t^2)^2}\right|\leqq\frac{4t}{|z|^3}\leqq\frac{4t}{x^3}$$

が成立つから，この無限積分は半平面 $\Re(z)>0$ に於て廣義一様收斂で，$z$ について 1 から $z(\Re(z)>0)$ まで積分するのに積分記號下でやれる．かくして

$$\frac{d}{dz}\ln\Gamma(z)=-\frac{1}{2z}+\ln z+C_1-2\int_0^\infty\frac{t}{(z^2+t^2)(e^{2\pi t}-1)}dt \tag{25.18}$$

を得，ここに $C_1$ は未定常數である．これを再び $z$ について 1 から $z$ まで積分するに，(11.8), (11.19) によって

$$\int_1^z\frac{t}{z^2+t^2}dz=\tan^{-1}\frac{z}{t}-\tan^{-1}\frac{1}{t}$$

$$=-\tan^{-1}\frac{t}{z}+\frac{\pi}{2}-\tan^{-1}\frac{1}{t}$$

となるから關係

$$\ln\Gamma(z)=\left(z-\frac{1}{2}\right)\ln z+(C_1-1)z+C_2+2\int_0^\infty\frac{\tan^{-1}(t/z)}{e^{2\pi t}-1}dt \tag{25.19}$$

が得られる．ここに $C_2$ も未定常數である．

$C_1$, $C_2$ を決定するのに，$z$ を正實數とすると不等式

$$0\leqq\tan^{-1}\frac{t}{z}\leqq\frac{t}{z}$$

が成立つから，(25.19) より

$$\left|\ln\Gamma(z)-\left(z-\frac{1}{2}\right)\ln z-(C_1-1)z-C_2\right|<\frac{2}{z}\int_0^\infty\frac{t}{e^{2\pi t}-1}dt$$

を得，この右邊は $z\to+\infty$ のとき $\to0$ である．しかるに (25.10) で

$$\left|\ln\Gamma(z)-\left(z-\frac{1}{2}\right)\ln z+z-\frac{1}{2}\ln(2\pi)\right|\to0\qquad(z\to+\infty)$$

を知っているから $C_1=0$, $C_2=\frac{1}{2}\ln(2\pi)$ でなければならない，よって $\Re(z)>0$ であるとき

$$\ln\Gamma(z)=\left(z-\frac{1}{2}\right)\ln z-z+\frac{1}{2}\ln(2\pi)+2\int_0^\infty\frac{\tan^{-1}(t/z)}{e^{2\pi t}-1}dt \tag{25.20}$$

が成立つ．但しこの式の對數函數，逆正切函數はすべて主値がとられている．これが **Binet の第二の積分公式**である．

$$\mu(z)\equiv\ln\Gamma(z)-\left(z-\frac{1}{2}\right)\ln z+z-\frac{1}{2}\ln(2\pi) \tag{25.21}$$

を **Binet の函數**という．(25.9) および (25.20) 中の積分項はそれぞれ $\Re(z)>0$ なる $z$ にたいする $\mu(z)$ の陽表式を與えるもので，$\Gamma(z)$ の數値計算に於て後に重要な役割を演ずる．しかし $\Re(z)<0$ なる $z$ にたいする $\mu(z)$ の見積りも重要である．それは最も簡單には次の定理から得られる．

## §26.　$\Psi(z)$ および $\Gamma(z)$ の乗法定理

**乗子** (multiplier) とよばれる自然數 $k$ と負實軸に沿うて溝を入れた平面（これを以下主要領域とよぶ）の點 $z$ にたいして

$$\frac{1}{k}\left[\Psi(z)+\Psi\left(z+\frac{1}{k}\right)+\cdots\cdots+\Psi\left(z+\frac{k-1}{k}\right)\right] \tag{26.1}$$

なる函數を考える．これを $\Phi(kz)$ とおき，$z$ の代わりに $z+\frac{1}{k}$ とおいた $\Phi(kz+1)$ との差をつくれば，(24.2) により

$$\Phi(kz+1)-\Phi(kz)=\frac{1}{kz}$$

となる．よって $\Phi(z)=\Psi(z)+E(z)$ とおけば $E(z)$ は週期 1 の解析函數である．これは $\Psi(z)$ のみたす條件 (24.13) の第二の式によって唯一つに決定される．即ち

$$E(kz)=\frac{1}{k}\sum_{r=0}^{k-1}\Psi\left(z+\frac{r}{k}\right)-\Psi(kz)$$

に於て $z$ の代わりに $z+n$ とおけば

$$E(kz)=\frac{1}{k}\sum_{r=0}^{k-1}\Psi\left(z+\frac{r}{k}+n\right)-\Psi(kz+kn).$$

これを

$$=\frac{1}{k}\sum_{r=0}^{k-1}\left[\Psi\left(z+\frac{r}{k}+n\right)-\ln n\right]-[\Psi(kz+kn)-\ln(kn)]$$
$$+\ln n-\ln(kn)$$

と書きなおし $n\to\infty$ にやれば，始めの二つの角括弧の中はいずれも 0 となり

$$E(kz)=-\ln k$$

となる．よってこれを入れて $\Psi(z)$ にたいする **Gauss の乗法定理**

$$\Psi(kz)=\frac{1}{k}\sum_{r=0}^{k-1}\Psi\left(z+\frac{r}{k}\right)+\ln k \tag{26.2}$$

が得られる．

次に (24.1) によってこれを表わせば

$$\frac{1}{k}\frac{d}{dz}\ln\Gamma(kz)=\frac{1}{k}\sum_{r=0}^{k-1}\frac{d}{dz}\ln\Gamma\left(z+\frac{r}{k}\right)+\ln k$$

となるがこの兩邊を $k$ 倍し主要領域内で $z=1$ から點 $z$ まで積分すれば

$$\ln\Gamma(kz)-\ln\Gamma(k)=\sum_{r=0}^{k-1}\left[\ln\Gamma\left(z+\frac{r}{k}\right)-\ln\Gamma\left(1+\frac{r}{k}\right)\right]+k\ln k\cdot(z-1)$$

を得，これの指數函數を作れば

$$\frac{\Gamma(kz)}{\Gamma(k)}=\frac{\prod_{r=0}^{k-1}\Gamma\left(z+\frac{r}{k}\right)}{\prod_{r=0}^{k-1}\Gamma\left(1+\frac{r}{k}\right)}k^{k(z-1)} \tag{26.3}$$

となる．ところで

$$\prod_{r=0}^{k-1}\Gamma\left(1+\frac{r}{k}\right)=\prod_{r=1}^{k-1}\frac{r}{k}\Gamma\left(\frac{r}{k}\right)=\frac{1\cdot2\cdot\cdots\cdot(k-1)}{k^{k-1}}\prod_{r=1}^{k-1}\Gamma\left(\frac{r}{k}\right)$$
$$=\frac{\Gamma(k)}{k^{k-1}}\cdot\frac{(2\pi)^{\frac{k-1}{2}}}{k^{\frac{1}{2}}}$$

であるから[1]，これを入れると

$$\Gamma(kz)=(2\pi)^{-\frac{k-1}{2}}k^{kz-\frac{1}{2}}\prod_{r=0}^{k-1}\Gamma\left(z+\frac{r}{k}\right). \tag{26.4}$$

これが **Gauss の $\Gamma(z)$ にたいする乗法定理**である．$k=2$ の場合：

$$\Gamma(2z)=\frac{2^{2z-1}}{\sqrt{\pi}}\Gamma(z)\Gamma\left(z+\frac{1}{2}\right) \tag{26.5}$$

---

1) $\varepsilon=e^{i\frac{2\pi}{k}}$ を 1 の $k$ 乗根とすれば

$$z^k-1=(z-1)\prod_{r=1}^{k-1}(z-\varepsilon^r).$$

従って $\prod_{r=1}^{k-1}(z-\varepsilon^r)=1+z+\cdots\cdot+z^{k-1}$ が成立つ．$z=1$ とすれば

$$\prod_{r=1}^{k-1}(1-\varepsilon^r)=k,\qquad \text{これは}\qquad \prod_{r=1}^{k-1}(1-\varepsilon^{-r})=k$$

とも書ける．これを邊々かけ合わせ

$$(1-\varepsilon^r)(1-\varepsilon^{-r})=2-\varepsilon^r+\varepsilon^{-r}=\left(2\sin\frac{\pi r}{k}\right)^2$$

に注意すれば，**Euler の公式**

$$\prod_{r=1}^{k-1}\sin\frac{\pi r}{k}=\frac{k}{2^{k-1}} \tag{26.8}$$

を得る．一方 (22.15) に $z=r/k$ とおき $r=1,2,\cdots\cdot,k-1$ とした諸式をかけ合わせると

$$\prod_{r=1}^{k-1}\Gamma\left(\frac{r}{k}\right)\Gamma\left(1-\frac{r}{k}\right)=\frac{\pi^{k-1}}{\prod_{r=1}^{k-1}\sin\frac{\pi r}{k}}.$$

この左邊には同じ因數が 2 回おこっていることに注意するとこれより

$$\prod_{r=1}^{k-1}\Gamma\left(\frac{r}{k}\right)=(2\pi)^{\frac{k-1}{2}}/k^{\frac{1}{2}}. \tag{26.9}$$

は Legendre によって與えられた (2 倍公式 duplication formula). この式で $z$ の代わりに $z+\frac{1}{2}$ または $\frac{z}{2}$ とおけば次の關係が生ずる.

$$\Gamma(2z+1)=\frac{4^z}{\sqrt{\pi}}\Gamma\left(z+\frac{1}{2}\right)\Gamma(z+1), \tag{26.6}$$

$$\Gamma(z)=\frac{2^{z-1}}{\sqrt{\pi}}\Gamma\left(\frac{z}{2}\right)\Gamma\left(\frac{z+1}{2}\right). \tag{26.7}$$

**問 1.** $n$ が自然数のとき次式を證明せよ.

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}+n\right)=\frac{(2n)!}{4^n\cdot n!}\sqrt{\pi}, \qquad \Gamma\left(\frac{1}{2}-n\right)=(-1)^n 4^n\frac{n!}{(2n)!}\sqrt{\pi}.$$

**問 2.** (26.6) に於て $z$ の代わりに $2^{-m}z$, $(m=1,2,\cdots,n)$ とおき積を作ることによって次の **J. Knar の公式**を導け.

$$\Gamma(1+z)=\frac{4^z}{\sqrt{\pi}}\prod_{m=1}^{\infty}\Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{z}{2^m}\right).$$

**問 3.** $\Gamma\left(\frac{k}{12}\right)$, $(k=1,2,\cdots,11)$ が $\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)$, $\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)$ で表わされることを示せ. $\tau=\sqrt{3}+1$ として

$$\Gamma\left(\frac{1}{12}\right)=2^{-\frac{1}{4}}\cdot 3^{\frac{3}{8}}\sqrt{\frac{\tau}{\pi}}\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\Gamma\left(\frac{1}{4}\right),$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{6}\right)=2^{-\frac{1}{3}}\sqrt{\frac{3}{\pi}}\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)^2,$$

$$\Gamma\left(\frac{5}{12}\right)=2^{\frac{3}{4}}\cdot 3^{-\frac{1}{8}}\sqrt{\frac{\pi}{\tau}}\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\Big/\Gamma\left(\frac{1}{3}\right).$$

## §27. Stirling の級數

上に導かれた乘法定理によって Binet の函數 (25.21) を變形してみよう. $z$ の代わりに $kz$ とおけば

$$\mu(kz)=\ln\Gamma(kz)-\left(kz-\frac{1}{2}\right)\ln kz+kz-\frac{1}{2}\ln 2\pi \tag{27.1}$$

を得, これに (26.4) の對數をとった式

$$\ln\Gamma(kz)=-\frac{k-1}{2}\ln 2\pi+\left(kz-\frac{1}{2}\right)\ln k+\sum_{r=0}^{k-1}\ln\Gamma\left(z+\frac{r}{k}\right)$$

を入れれば

$$\mu(kz)=-\frac{k}{2}\ln 2\pi-\left(kz-\frac{1}{2}\right)\ln z+kz+\sum_{r=0}^{k-1}\ln\Gamma\left(z+\frac{r}{k}\right),$$

これを

$$=\sum_{r=0}^{k-1}\left[\ln\Gamma\left(z+\frac{r}{k}\right)-\frac{1}{2}\ln 2\pi-z(\ln z-1)\right]+\frac{1}{2}\ln z \tag{27.2}$$

と書く．いまこの兩邊を $kz$ で割って $k\to\infty$ ならしめれば，定積分の定義により

$$\lim_{k\to\infty}\frac{\mu(kz)}{kz}=\frac{1}{z}\left[\int_0^1\ln\Gamma(z+u)du-\frac{1}{2}\ln 2\pi-z(\ln z-1)\right] \tag{27.3}$$

なる關係が得られる．一方 (26.2) で $k\to\infty$ ならしめて關係

$$\lim_{k\to\infty}[\Psi(kz)-\ln k]=\int_0^1\Psi(z+u)du \tag{27.4}$$

を得るが

$$\frac{d}{dz}\int_0^1\Psi(z+u)du=\int_0^1\Psi'(z+u)du=\Psi(z+1)-\Psi(z)=\frac{1}{z}$$

であるから，積分して

$$\int_0^1\Psi(z+u)du=\ln z+A,\qquad A\text{ は積分常數.}$$

故に

$$\begin{aligned}A&=\int_0^1\Psi(z+u)du-\ln z\\&=\int_0^1\Psi(z+n+u)du-\ln(z+n)\\&=\int_0^1[\Psi(z+n+u)-\ln(z+n)]du\\&=\lim_{n\to\infty}\int_0^1[\Psi(z+n+u)-\ln(z+n)]du\\&=0,\qquad\text{((24.9) により).}\end{aligned}$$

よって

$$\int_0^1\Psi(z+u)du=\ln z \tag{27.5}$$

が成立つ．これを (27.4) に用いて

$$\lim_{k\to\infty}[\Psi(kz)-\ln kz]=0 \tag{27.6}$$

を得る．そこで (27.3) にもどり

$$G(z)=\int_0^1\ln\Gamma(z+u)du-\frac{1}{2}\ln 2\pi-z(\ln z-1)$$

とおけば，(27.5) により

$$G'(z)=\int_0^1\Psi(z+u)du-\ln z=0.$$

故に

$$G(z)=\text{const}=B$$

で，従って (27.3) は

$$\lim_{k\to\infty}\frac{\mu(kz)}{kz}=\frac{B}{z}$$

を與えるが，この左邊は $z$ の代わりに $2z$ を入れても變わらない，このことは右邊で考えれば $B=0$ のときにのみ可能である．よって

$$\int_0^1 \ln\Gamma(z+u)du=\frac{1}{2}\ln 2\pi+z(\ln z-1). \tag{27.7}$$

かくして (27.2) にこの表示となお

$$\ln z=\ln\frac{\Gamma(z+1)}{\Gamma(z)}=\ln\Gamma(z+1)-\ln\Gamma(z)$$

を入れると

$$\mu(kz)=\sum_{r=0}^{k-1}\ln\Gamma\left(z+\frac{r}{k}\right)+\frac{1}{2}\ln\Gamma(z+1)-\frac{1}{2}\ln\Gamma(z)-k\int_0^1\ln\Gamma(z+u)du \tag{27.8}$$

なる表示が得られる．この右邊の積分の前の項までの和は最後の積分にたいする梯形和

$$T\equiv\frac{1}{k}\left[\frac{1}{2}\ln\Gamma(z)+\ln\Gamma\left(z+\frac{1}{k}\right)+\cdots+\ln\Gamma\left(z+\frac{k-1}{k}\right)+\frac{1}{2}\ln\Gamma(z+1)\right]$$

の $k$ 倍に他ならない．この兩者の差を評價する式に有名な **Euler-Maclaurin の積分公式**がある．その基本式は[1]，$b-a=\omega$ と書いて

$$\int_a^b f(u)du=\omega\frac{f(a)+f(b)}{2}+\sum_{\nu=1}^{m}\frac{B_{2\nu}\omega^{2\nu}}{(2\nu)!}[f^{(2\nu-1)}(a)-f^{(2\nu-1)}(b)]+R, \tag{27.9}$$

$$R=-\frac{\omega^{2m+1}}{(2m+1)!}\int_a^b B_{2m+1}\left(\frac{u-a}{b-a}\right)f^{(2m+1)}(u)du$$

である．ここに

$$B_2=\frac{1}{6},\qquad B_4=-\frac{1}{30},\qquad B_6=\frac{1}{42},\qquad B_8=-\frac{1}{30},\qquad\cdots\cdots$$

は Bernoulli の數，

$$B_0(u)=1,\quad B_1(u)=u-\frac{1}{2},\quad B_2(u)=u^2-u+\frac{1}{6},\quad B_3(u)=u^3-\frac{3}{2}u^2+\frac{1}{2}u,\quad\cdots\cdots$$

は Bernoulli の多項式である．

いま (27.9) を $f(u)\equiv\ln\Gamma(z+u)$, $a=\frac{r}{k}$, $b=\frac{r+1}{k}$, $\omega=\frac{1}{k}$ として適用すれば

$$\int_{r/k}^{(r+1)/k}\ln\Gamma(z+u)du=\frac{\ln\Gamma\left(z+\frac{r}{k}\right)+\ln\Gamma\left(z+\frac{r+1}{k}\right)}{2k}$$

1　拙著「計算法」，朝倉書店，昭和25年，269頁．

$$+\sum_{\nu=1}^{m}\frac{B_{2\nu}}{(2\nu)!\,k^{2\nu}}\left[f^{(2\nu-1)}\left(\frac{r}{k}\right)-f^{(2\nu-1)}\left(\frac{r+1}{k}\right)\right]+R,$$

$$R=-\frac{1}{(2m+1)!\,k^{2m+2}}\int_0^1 B_{2m+1}(v)f^{(2m+1)}\left(\frac{r+v}{k}\right)dv$$

となる．これに於て $r=0,1,\cdots,k-1$ として作った式を邊々加えると

$$\int_0^1 \ln\Gamma(z+u)\,du=T+\sum_{\nu=1}^{m}\frac{B_{2\nu}}{(2\nu)!\,k^{2\nu}}[f^{(2\nu-1)}(0)-f^{(2\nu-1)}(1)]+R_m(z,k),$$

$$R_m(z,k)=-\frac{1}{(2m+1)!\,k^{2m+2}}\int_0^1 B_{2m+1}(v)\cdot\sum_{r=0}^{k-1}f^{(2m+1)}\left(\frac{r+v}{k}\right)dv \tag{27.10}$$

を得る．$f(u)=\ln\Gamma(z+u)$ であるから

$$f'(0)-f'(1)=\Psi(z)-\Psi(z+1)=-\frac{1}{z},$$

$$f'''(0)-f'''(1)=\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{-2}{(z+n+u)^3}\right]_{u=1}^{u=0}=-\frac{2!}{z^3},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$f^{(2\nu-1)}(0)-f^{(2\nu-1)}(1)=-\frac{(2\nu-2)!}{z^{2\nu-1}}.$$

これを入れると (27.8) は

$$\mu(kz)=\sum_{\nu=1}^{m}\frac{B_{2\nu}}{(2\nu-1)2\nu(kz)^{2\nu-1}}-kR_m(z,k) \tag{27.11}$$

となる．$|z|$ がいかに大でも $z$ を固定して $m\to\infty$ ならしめれば級数

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{B_{2\nu}}{(2\nu-1)2\nu(kz)^{2\nu-1}} \tag{27.12}$$

は發散する．このことは (13.15) を用いると一般項が

$$(-1)^{\nu+1}\frac{2}{\pi}\frac{(2\nu-2)!\,S(2\nu)}{(2\pi kz)^{2\nu-1}}$$

と表わされこの絶對値が $\nu\to\infty$ のとき $\to\infty$ となることからわかる．しかし反對に $m$ を固定して $k\to\infty$ ならしめるときは $R_m(z,k)\to 0$ となる性質がある．これを證明しよう．(27.10) の兩邊に $k^{2m+}$ をかければ

$$k^{2m+1}R_m(z,k)=-\frac{1}{(2m+1)!}\int_0^1 B_{2m+1}(v)\cdot\frac{1}{k}\sum_{r=0}^{k-1}f^{(2m+1)}\left(\frac{r+v}{k}\right)dv.$$

ところで

$$\lim_{k\to\infty}\frac{1}{k}\sum_{r=0}^{k-1}f^{(2m+1)}\left(\frac{r}{k}+\frac{v}{k}\right)=\int_0^1 f^{(2m+1)}(u)\,du$$

で，この値は $v$ に無關係であるから

$$\lim_{k\to\infty} k^{2m+1}R_m(z,k) = -\frac{1}{(2m+1)!}\left(\int_0^1 f^{(2m+1)}(u)du\right)\cdot\int_0^1 B_{2m+1}(v)dv$$

と書かれる．ところで

$$\int_0^1 B_{2m+1}(v)dv = 0$$

であるから[1]

(27.13) $$\lim_{k\to\infty} k^{2m+1}R_m(z,k) = 0$$

が證明された．このことは (27.11) により

$$\lim_{k\to\infty} k^{2m}\left[\mu(kz) - \sum_{\nu=1}^{m}\frac{B_{2\nu}}{(2\nu-1)2\nu(kz)^{2\nu-1}}\right] = 0$$

を意味する．ところでこの括弧の中の値は $k$ 倍の $z$ のみに關係するから，この式は，$z$ を主要領域の任意の一點とするとき，原點から $z$ に向う半直線に沿うて無限遠に行くとき

(27.14) $$\lim_{|z|\to\infty} z^{2m}\left[\mu(z) - \sum_{\nu=1}^{m}\frac{B_{2\nu}}{(2\nu-1)2\nu\, z^{2\nu-1}}\right] = 0$$

なること，換言すれば $|z|\to\infty$ ($|\arg z|\leqq\pi-\delta$, $\delta>0$) のとき

(27.15) $$\mu(z) = \sum_{\nu=1}^{m}\frac{B_{2\nu}}{(2\nu-1)2\nu\, z^{2\nu-1}} + O\left(\frac{1}{z^{2m+1}}\right)$$

なることを意味する．この Poincaré によって始めて確立された意味に於て發散級數 (27.12) は $\mu(z)$ の**漸近級數**といわれる．かくて (25.21) により $\ln\Gamma(z)$ の $|z|\to\infty$ (但し $|\arg z|\leqq\pi-\delta$, $\delta>0$) にたいする漸近級數，いわゆる **Stirling の級數**[2]

(27.16) $$\ln\Gamma(z) \sim \left(z-\frac{1}{2}\right)\ln z - z + \frac{1}{2}\ln(2\pi) + \sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{B_{2\nu}}{(2\nu-1)2\nu\, z^{2\nu-1}}$$
$$= \left(z-\frac{1}{2}\right)\ln z - z + \frac{1}{2}\ln(2\pi)$$
$$+\frac{1}{12z} - \frac{1}{360z^3} + \frac{1}{1260z^5} - \frac{1}{1680z^7} + \frac{1}{1188z^9} - \frac{691}{360360z^{11}} + \cdots$$

が得られた．次にこの指數函數をつくれば

(27.17) $$\Gamma(z) \sim \sqrt{2\pi}\, z^{z-\frac{1}{2}} e^{-z}\left\{1 + \frac{1}{12z} + \frac{1}{288z^2} - \frac{139}{51840z^3} - \frac{571}{2488320z^4}\right.$$
$$\left. + \frac{163879}{209018880z^5} + \frac{5246819}{75246796800z^6} - \frac{534703531}{902961561600z^7} + O\left(\frac{1}{z^8}\right)\right\}$$

なる $\Gamma(z)$ **にたいする漸近公式**が得られる．さらに

---

1) 前揭「計算法」p. 255.

2) J. Stirling, *Methodus Differentialis sive tractatus de summatione et interpolatione serierum infinitarum*, London (1730), p. 137 に始めて發表された．

(27.18)
$$\Gamma(z)=\sqrt{2\pi}z^{z-\frac{1}{2}}e^{-z}e^{\mu(z)}$$
に於て $z$ の代わりに $2z$ をおけば
$$\Gamma(2z)=\sqrt{2\pi}2^{2z-\frac{1}{2}}z^{2z-\frac{1}{2}}e^{-2z}e^{\mu(2z)}.$$
この式を上の式で邊々割れば，(26.5) により

(27.19)
$$\Gamma\left(z+\frac{1}{2}\right)=\sqrt{2\pi}z^z e^{-z}e^{-\mu(z)+\mu(2z)}$$
を得る．

(27.20)
$$\mu(z)=\frac{1}{12z}-\frac{1}{360z^3}+\frac{1}{1260z^5}-\cdots$$
にたいし

(27.21)
$$-\mu(z)+\mu(2z)=-\frac{1}{24z}+\frac{7}{2880z^3}-\frac{31}{40320z^5}+\cdots$$
であるから近似値 $\Gamma(z)\sim\sqrt{2\pi}z^{z-\frac{1}{2}}e^{-z}$ より近似値 $\Gamma\left(z+\frac{1}{2}\right)\sim\sqrt{2\pi}z^z e^{-z}$ の方が相對的に精密であることがわかる．

## §28. 續　き

Stirling の公式については多くの導き方が發表されたが，いま一つ 1873 年に Gilbert[1] によって與えられた方法を述べよう．但し公式が $|\arc z|<\frac{\pi}{2}$ にたいしてのみならず $|\arc z|<\pi$ にまで成立つことを注意したのは Stieltjes[2] である．

さて主要領域に於て成立つ (27.18) により
$$z=\frac{\Gamma(z+1)}{\Gamma(z)}=\frac{(z+1)^{z+\frac{1}{2}}}{z^{z+\frac{1}{2}}}\cdot z\cdot e^{-1}e^{\mu(z+1)-\mu(z)}$$
が導かれ，これより

(28.1)
$$\mu(z)-\mu(z+1)=\left(z+\frac{1}{2}\right)\ln\left(1+\frac{1}{z}\right)-1$$
が従う．この關係を繰り返し用いると，$\lim_{n\to\infty}\mu(z+n)=0$ であるから

(28.2)
$$\mu(z)=\sum_{s=0}^{\infty}\left[\left(z+s+\frac{1}{2}\right)\ln\left(1+\frac{1}{z+s}\right)-1\right]$$
と表わされ，これに恒等式
$$\frac{\frac{1}{2}-t}{t+z}=\frac{z+\frac{1}{2}}{t+z}-1$$

1) Ph. Gilbert, *Recherches sur le développement de la fonction Γ et sur certaines intégrales définies qui en dependent*. Mém. de Belgique Bd. 41, p. 1-60. 1873.

2) T. J. Stieltjes, *Sur le développement de logΓ(a)*. Journal de Math. (4) Bd. 5, p. 425-444. 1889.

を積分して得る關係

$$\int_0^1 \frac{\frac{1}{2}-t}{t+z}dt=\left(z+\frac{1}{2}\right)\ln\left(1+\frac{1}{z}\right)-1$$

を用いると

$$\mu(z)=\sum_{s=0}^{\infty}\int_0^1 \frac{\frac{1}{2}-t}{t+z+s}dt \tag{28.3}$$

と書ける．ところで $0<\theta<2\pi$ に於ける Fourier の sin 表示

$$\frac{\pi}{2}-\frac{\theta}{2}=\sum_{s=1}^{\infty}\frac{\sin s\theta}{s}$$

に於て $\theta=2\pi t$ とおくと關係

$$\frac{1}{2}-t=\sum_{s=1}^{\infty}\frac{\sin 2\pi st}{\pi s}\qquad(0<t<1) \tag{28.4}$$

が成立つが，この右邊の符號を變えた値は左邊から見て區間 $[0,1]$ に於ける Bernoulli の 1 次の多項式に等しく且つ 1 を週期とするからいわゆる 1 次の週期的 Bernoulli 函數 $\bar{B}_1(t)$ に他ならない[1]．よって (28.3) は

$$\mu(z)=-\sum_{s=0}^{\infty}\int_0^1 \frac{\bar{B}_1(t)}{t+z+s}dt=-\int_0^{\infty}\frac{\bar{B}_1(t)}{t+z}dt \tag{28.5}$$

と書かれる．これは Gilbert が得た公式でこれを部分積分することにより Stirling の級數が生ずる．そのため **$n$ 次の週期的 Bernoulli 函數** $\bar{B}_n(t)$ を想起すれば，それは區間 $[0,1]$ に於ける Bernoulli 多項式 $B_n(t)$ によって次の如く定義されるものである[1]．

$$\begin{cases} 0\leqq t<1 \quad \text{にたいし}\quad \bar{B}_n(t)\equiv B_n(t), \\ \text{すべての實なる } t \text{ にたいし}\quad \bar{B}_n(t+1)=\bar{B}_n(t). \end{cases} \tag{28.6}$$

ここに $B_n(t)$ は $B_0(t)=1$ から出發して關係

$$\begin{cases} \dfrac{dB_n(t)}{dt}=nB_{n-1}(t), \\ \displaystyle\int_0^1 B_n(t)dt=0 \end{cases}\qquad(n\geqq 1) \tag{28.7}$$

により逐次定義される $n$ 次の多項式で

$$B_{2n+1}(0)=B_{2n+1}\left(\frac{1}{2}\right)=B_{2n+1}(1)=0,$$

$$B_{2n}(0)=B_{2n}(1)=B_{2n}=\text{Bernoulli の數}$$

---

1) 拙著「計算法」朝倉書店 (昭和 25 年) 263 頁．

が成立つ．しかるときは (28.4) に相當して

$$
(28.8)\qquad \begin{cases} \bar{B}_{2n}(t)=(-1)^{n-1}2(2n)!\displaystyle\sum_{s=1}^{\infty}\frac{\cos 2s\pi t}{(2s\pi)^{2n}}, \\ \bar{B}_{2n+1}(t)=(-1)^{n+1}2(2n+1)!\displaystyle\sum_{s=1}^{\infty}\frac{\sin 2s\pi t}{(2s\pi)^{2n+1}} \end{cases}
$$

の右邊がそれぞれ左邊の Fourier 展開であることが容易に檢される．さらに

$$
\int_0^t \bar{B}_{2n-1}(t)dt=\frac{\bar{B}_{2n}(t)-B_{2n}}{2n},
$$

$$
\int_0^t \bar{B}_{2n}(t)dt=\frac{\bar{B}_{2n+1}(t)}{2n+1}
$$

が成立つことを用いて (28.5) を一回部分積分すれば

$$
\mu(z)=\left[-\frac{1}{t+z}\int_0^t \bar{B}_1(\tau)d\tau\right]_0^\infty-\int_0^\infty\left(\int_0^t \bar{B}_1(\tau)d\tau\right)\frac{dt}{(t+z)^2}
$$

の最初の項が兩端で 0 になるため

$$
\mu(z)=\frac{B_2}{1\cdot 2z}-\frac{1}{2}\int_0^\infty\frac{\bar{B}_2(t)}{(t+z)^2}dt
$$

を得，これにまた部分積分を施し

$$
\mu(z)=\frac{B_2}{1\cdot 2z}-\frac{1}{3}\int_0^\infty\frac{\bar{B}_3(t)}{(t+z)^3}dt,
$$

これにまた部分積分を施す等進むことにより一般式

$$
(28.9)\qquad \mu(z)=\sum_{p=1}^{n}\frac{B_{2p}}{(2p-1)2pz^{2p-1}}-\frac{1}{2n}\int_0^\infty\frac{\bar{B}_{2n}(t)}{(t+z)^{2n}}dt
$$

が得られる．そこで

$$
z=\rho e^{i\theta},\qquad -\pi<\theta<\pi
$$

として剩餘

$$
R_n(z)=-\frac{1}{2n}\int_0^\infty\frac{\bar{B}_{2n}(t)}{(t+z)^{2n}}dt
$$

を評價してみる．まず $t\geqq 0$ にたいして

$$
|t+z|^2=|t+\rho\cos\theta+i\rho\sin\theta|^2=(t+\rho)^2-4\rho t\sin^2\frac{\theta}{2},
$$

そして明らかに $(t+\rho)^2>4\rho t$ であるから

$$
|t+z|^2\geqq(t+\rho)^2\cos^2\frac{\theta}{2}.
$$

よって

$$(28.10)\qquad |t+z| \geqq (t+\rho)\left|\cos\frac{\theta}{2}\right|$$

が成立つ．また

$$R_n(z) = -\frac{1}{2n+1}\int_0^\infty \frac{\bar{B}_{2n+1}(t)}{(t+z)^{2n+1}}dt$$

と書きなおし，これを再び部分積分して

$$(28.11)\qquad R_n(z) = \frac{1}{2n+2}\int_0^\infty \frac{\bar{B}_{2n+2}(0)-\bar{B}_{2n+2}(t)}{(t+z)^{2n+2}}dt$$

と書けば，(28.8) の定義式から $t \geqq 0$ にたいし

$$(28.12)\qquad (-1)^{n-1}[\bar{B}_{2n+2}(0)-\bar{B}_{2n+2}(t)] \geqq 0$$

が成立つゆえ，(28.10) を用いて

$$|R_n(z)| \leqq \frac{1}{\left(\cos\frac{\theta}{2}\right)^{2n+2}}|R_n(\rho)|$$

がしたがう．ところで

$$R_n(\rho) = \frac{B_{2n+2}}{(2n+1)(2n+2)\rho^{2n+1}} + R_{n+1}(\rho)$$

で，(28.11) と (28.12) とから $R_n(\rho)$, $R_{n+1}(\rho)$ が互に異符號なることがわかるから

$$|R_n(\rho)| \leqq \frac{|B_{2n+2}|}{(2n+1)(2n+2)\rho^{2n+1}}$$

がいえる．かくして $z=\rho e^{i\theta}$, $-\pi<\theta<\pi$ にたいし見積り

$$(28.13)\qquad |R_n(z)| \leqq \frac{|B_{2n+2}|}{(2n+1)(2n+2)\rho^{2n+1}\left(\cos\frac{\theta}{2}\right)^{2n+2}}$$

が證明せられた．特にこれに於て $n=0$ とすれば

$$(28.14)\qquad |\mu(\rho e^{i\theta})| \leqq \frac{1}{12\rho\cos^2\frac{\theta}{2}}$$

がしたがい，これに於てさらに特に $\theta=0$ 即ち $z=x>0$ とすれば

$$(28.15)\qquad \mu(x) = \frac{\theta(x)}{12x}, \qquad 0 \leqq \theta(x) \leqq 1$$

と書かれることがわかる．

## §29.　實ガンマ函數の理論

定差方程式 (22.13)（I）の單獨解として解析函數 $\Gamma(z)$ を特徴づける條件としては既に (22.13)（II）

および (22.13) (Ⅲ) を述べたが，H. Bohr と J. Mollerup[1] は 1922 年實ガンマ函數を特徴づける興味ある條件を與え，これは E. Artin[2] によってさらに簡明な體系に整えられた．まず凸函數の性質[3]を述べよう．

$\varphi(x)$ を區間 $[a,b]$ で定義された函數とするとき區間内の任意の二點 $x_1, x_2$ にたいして

$$\varphi\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \leqq \frac{\varphi(x_1)+\varphi(x_2)}{2} \tag{29.1}$$

が成立つならば $\varphi(x)$ は $[a,b]$ で**凸函數**であるという．すると區間の任意の $x_1,\cdots\cdots,x_n$ にたいして

$$\varphi\left(\frac{x_1+\cdots\cdots+x_n}{n}\right) \leqq \frac{\varphi(x_1)+\cdots\cdots+\varphi(x_n)}{n} \tag{29.2}$$

の成立つことがしたがう．さらに

$\varphi(x)$ が $[a,b]$ で凸で且つ上に有界であるならば $a<x<b$ で $\varphi(x)$ は連續である．

$\varphi(x)$ が $[a,b]$ で連續な凸函數であれば區間の任意の $x_1,\cdots\cdots,x_n$ および任意の正數 $a_1,\cdots\cdots,a_n$ にたいし

$$\varphi\left(\frac{a_1x_1+\cdots\cdots+a_nx_n}{a_1+\cdots\cdots+a_n}\right) \leqq \frac{a_1\varphi(x_1)+\cdots\cdots+a_n\varphi(x_n)}{a_1+\cdots\cdots+a_n} \tag{29.3}$$

が成立つ．

ここではこれらの性質を前提して次の定理を證明しよう．

**定理 1.** $\varphi(x)$ が $[a,b]$ で連續な凸函數であれば區間内部で左側および右側微係數が存在し

$$\varphi_-'(x) \leqq \varphi_+'(x) \tag{29.4}$$

で且つ $\varphi_-'(x)$, $\varphi_+'(x)$ は增加函數である．なお $h$ の函數

$$\psi(h) = \frac{\varphi(x+h)-\varphi(x)}{h} \tag{29.5}$$

は $h$ の增加函數で $x_1<x_2$ にたいして

$$\varphi_+'(x_1) \leqq \frac{\varphi(x_2)-\varphi(x_1)}{x_2-x_1} \leqq \varphi_-'(x_2) \tag{29.6}$$

が成立つ．

**證明**　$0<h_1<h$ とすれば $x+h_1=\dfrac{(h-h_1)x+h_1(x+h)}{h}$ であるから (29.3) により

$$\varphi(x+h_1) \leqq \frac{(h-h_1)\varphi(x)+h_1\varphi(x+h)}{h}$$

が成立つ．書きなおして

1) H. Bohr and J. Mollerup, *Laerebog i matematisk Analyse* (Kopenhagen 1922), Bd. III. p. 149–164.

2) E. Artin, *Einführung in die Theorie der Gammafunktion*, Hamb. Math. Einzelschr. **11** (Leipzig 1931).

3) 辻正次，實變數函數論，淸水書院，昭和 25 年，359 頁參照．

(29.7)
$$\frac{\varphi(x+h_1)-\varphi(x)}{h_1}\leqq\frac{\varphi(x+h)-\varphi(x)}{h}$$

を得．故に $h$ が減少すれば $\dfrac{\varphi(x+h)-\varphi(x)}{h}$ は減少するから

(29.8)
$$\lim_{h\to+0}\frac{\varphi(x+h)-\varphi(x)}{h}=\varphi_+'(x)$$

が存在する．同様に

$$\varphi(x-h_1)\leqq\frac{(h-h_1)\varphi(x)+h_1\varphi(x-h)}{h}$$

から

(29.9)
$$\frac{\varphi(x)-\varphi(x-h_1)}{h_1}\geqq\frac{\varphi(x)-\varphi(x-h)}{h}$$

を得，よって

(29.10)
$$\lim_{h\to+0}\frac{\varphi(x)-\varphi(x-h)}{h}=\varphi_-'(x)$$

が存在する．また凸函數の定義から得る

$$\frac{\varphi(x)-\varphi(x-h)}{h}\leqq\frac{\varphi(x+h)-\varphi(x)}{h}$$

に於て $h\to+0$ として

(29.11)
$$\varphi_-'(x)\leqq\varphi_+'(x).$$

さらに

$$\frac{\varphi(x)-\varphi(x-h)}{h}\leqq\varphi_-'(x)\leqq\varphi_+'(x)\leqq\frac{\varphi(x+h)-\varphi(x)}{h}.$$

よって $x_1=x,\ x_2=x+h$ および $x_1=x-h,\ x_2=x$ とおいて

(29.12)
$$\varphi_+'(x_1)\leqq\frac{\varphi(x_2)-\varphi(x_1)}{x_2-x_1}\leqq\varphi_-'(x_2),\qquad(x_1<x_2)$$

が得られる．なお (29.11), (29.12) より $\varphi_-'(x_1)\leqq\varphi_+'(x_1)\leqq\varphi_-'(x_2)\leqq\varphi_+'(x_2)$ を得るから $\varphi_-'(x)$, $\varphi_+'(x)$ は増加函數である．

次に

**定理 2.** $\varphi(x)$ が $[a,b]$ で連續，$(a,b)$ で二階連續微分可能であれば，$\varphi(x)$ が $[a,b]$ で凸なるためには $(a,b)$ で $\varphi''(x)\geqq0$ なることが必要且つ十分である．

**證明** Taylor 展開により $\dfrac{x_1+x_2}{2}$ を中心として

$$\varphi(x_1)=\varphi\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)+\frac{x_1-x_2}{2}\varphi'\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)+\frac{(x_1-x_2)^2}{8}\varphi''(\xi_1),$$

$$\varphi(x_2)=\varphi\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)+\frac{x_2-x_1}{2}\varphi'\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)+\frac{(x_1-x_2)^2}{8}\varphi''(\xi_2),$$

$$(x_1<\xi_1<x_2,\qquad x_1<\xi_2<x_2).$$

故に

$$\frac{\varphi(x_1)+\varphi(x_2)}{2}-\varphi\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)=\frac{(x_1-x_2)^2}{16}[\varphi''(\xi_1)+\varphi''(\xi_2)]$$

$$=\frac{(x_1-x_2)^2}{8}\varphi''(\xi),\qquad (x_1<\xi<x_2)$$

が成立つ．これより $\varphi''(x)\geqq 0$ ならば $\varphi(x)$ が凸なることは明らかであり，逆に上式を $(x_1-x_2)^2$ で割って $x_2\to x_1$ ならしめることにより $\varphi''(x)\geqq 0$ が必要條件なることがしたがう．

さて (24.5) により $z=x>0$ にたいし $\varphi(x)\equiv\ln\Gamma(x)$ が二階連續微分可能な凸函數であることがわかる．このとき $\Gamma(x)$ は $x>0$ にたいし對數凸であるという．すると **Bohr-Mollerup の定理**は次のように主張する：

**函數 $\Gamma(x)$ は $x>0$ に於て次の三つの條件をみたす唯一つの函數である：**

(29.13)
$$\begin{cases} F(x+1)-xF(x)=0, & (\mathrm{I})\\ F(1)=1, & (\mathrm{II})\\ \text{對數凸である．} & (\mathrm{III})\end{cases}$$

なんとなれば $F(x)$ をこの三條件をみたす任意の函數とし，$n$ を 2 より大なる自然數，$x$ を $0<x\leqq 1$ なる數とすれば，

$$n-1<n<n+x\leqq n+1$$

にたいし $F(x)$ の對數凸のため（定理 1）

(29.14)
$$\frac{\ln F(n-1)-\ln F(n)}{(n-1)-n}<\frac{\ln F(n+x)-\ln F(n)}{(n+x)-n}\leqq\frac{\ln F(n+1)-\ln F(n)}{(n+1)-n}$$

が成立つ．一方（I）と（II）により

(29.15)
$$\begin{cases} F(n-1)=(n-2)!,\qquad F(n)=(n-1)!,\qquad F(n+1)=n!,\\ F(n+x)=x(x+1)\cdots\cdot(x+n-1)F(x)\end{cases}$$

が成立ち，(29.14) は

$$\ln(n-1)^x<\ln\frac{F(n+x)}{(n-1)!}\leqq\ln n^x$$

と書かれ，さらに對數の増加函數なることから

(29.16)
$$(n-1)^x<\frac{F(n+x)}{(n-1)!}\leqq n^x$$

がしたがう．(29.15) を用いると

$$\frac{(n-1)!\,(n-1)^x}{x(x+1)\cdots\cdot(x+n-1)}<F(x)\leqq\frac{(n-1)!\,n^x}{x(x+1)\cdots\cdot(x+n-1)}.$$

この不等式は任意の $n$ について成立つから左邊の $n-1$ を $n$ として

$$\frac{n!\,n^x}{x(x+1)\cdots\cdots(x+n)}<F(x)\leqq\frac{n!\,n^x}{x(x+1)\cdots\cdots(x+n)}\cdot\frac{x+n}{n}$$

或は (20.12) の記法で

$$\Gamma_n(x)<F(x)\leqq\Gamma_n(x)\frac{x+n}{n}$$

が成立つ．よって $n\to\infty$ とすると

$$F(x)=\lim_{n\to\infty}\Gamma_n(x)=\Gamma(x)$$

がしたがう．もちろん以上では $0<x\leqq1$ を假定したが任意の $x>0$ にたいし成立つことは定差方程式からしたがう．

Stirling の公式

$$(29.17)\qquad \begin{cases}\Gamma(x)=\sqrt{2\pi}\,x^{x-\frac{1}{2}}\,e^{-x}\,e^{\mu(x)},\\ \mu(x)=\sum_{p=1}^{n}\dfrac{B_{2p}}{(2p-1)2p\,x^{2p-1}}+R_n\end{cases}$$

の剰餘 $R_n$ には $x>0$ のときは特に簡單な評價

$$(29.18)\qquad R_n=\theta_{n+1}(x)\frac{B_{2n+2}}{(2n+1)(2n+2)x^{2n+1}},\qquad (0<\theta_{n+1}(x)<1)$$

が與えられる．このことは (28.11) を

$$R_n(x)=\frac{(-1)^{n+1}}{2n+2}\int_0^\infty\frac{(-1)^{n-1}[\bar{B}_{2n+2}(0)-\bar{B}_{2n+2}(t)]}{(t+x)^{2n+2}}dt$$

と書き，これに於て (28.12) が成立つことから $R_n(x)$, $R_{n+1}(x)$ が互に異符號なること，したがって關係

$$R_n(x)=\frac{B_{2n+2}}{(2n+1)(2n+2)x^{2n+1}}+R_{n+1}(x)$$

から $R_n(x)$ と $\dfrac{B_{2n+2}}{(2n+1)(2n+2)x^{2n+1}}$ が同符號で絕對值に於て前者が後者より小さくなければならないことからただちにしたがう．

## §30. $\Gamma(z)$ の漸近展開

(27.17) に於ては $\Gamma(z)$ の漸近展開を $\ln\Gamma(z)$ の漸近展開卽ち Stirling の級數から導いたのであるが，實はその係數の計算は容易ではない．次には Hankel の積分表示を變形したものに Watson の lemma を適用して直接求めてみよう．

一般に區間 $z>z_0$ または角領域 $\theta_1<\arg z<\theta_2$, $|z|>\rho$ に於て定義されている函數 $f(z)$ とこれにたいし（一般に發散する）無限級數 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^{-\lambda_n}$（但し $\lambda_n$ は $\lambda_0<\lambda_1<\lambda_2<\cdots\cdots\to+\infty$ となる實數で有限個は負であってもよい）が與えられて，部分和を $\sum_{n=0}^{m}a_nz^{-\lambda_n}=A_m(z)$ とするとき，もし $|z|\to\infty$ に

たいし

$$z^{\lambda_m}[f(z)-A_m(z)]\to 0 \tag{30.1}$$

或は

$$z^{\lambda_{m+1}}[f(z)-A_m(z)]\to a_{m+1}=O(1) \tag{30.2}$$

が成立つならば，この級數は $z=\infty$ に於ける $f(z)$ の漸近級數であるといい

$$f(z)\sim\sum_{n=0}^{\infty}a_n z^{-\lambda_n} \tag{30.3}$$

と記されるのであるが，函數のかような漸近展開を求めるのに Watson の補助定理とよばれる非常に有效な定理がある．それは $f(z)$ がある定積分の形に書かれたとき適用される．

**Watson の補助定理**　**$G(\tau)$ は $\tau=0$ の近傍で，$\tau=0$ は別として，正則で，$0<|\tau|\leqq a$ に於て收斂な級數**

$$G(\tau)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\tau^{\frac{n}{q}-1}\qquad (q>0) \tag{30.4}$$

**に展開され，$|\tau|\geqq a$ にたいしては，實軸にたいし $\chi$ なる角をなす直線に沿うて $\tau$ に無關係なある正數 $K$ および $b$ を以て**

$$|G(\tau)|<Ke^{b|\tau|} \tag{30.5}$$

**とおさえられるとする．このような函數 $G(\tau)$ を以て**

$$f(z)=\int_0^{\infty\cdot e^{i\chi}}e^{-z\tau}G(\tau)d\tau \tag{30.6}$$

**のように表わされる函數 $f(z)$ は $|z|$ が大なるとき角領域 $|\mathrm{arc}\,z+\chi|\leqq\frac{\pi}{2}-\delta$，$(\delta>0)$ に於て次のように漸近展開される．**

$$f(z)\sim\sum_{n=1}^{\infty}a_n\Gamma\left(\frac{n}{q}\right)z^{-\frac{n}{q}}. \tag{30.7}$$

**證明**　いま

$$G(\tau)-\sum_{n=1}^{m-1}a_n\tau^{\frac{n}{q}-1}=\triangle_m(\tau) \tag{30.8}$$

とおけば，定理の假定のもとに積分路全體について不等式

$$|\triangle_m(\tau)|\leqq K_1|\tau|^{\frac{m}{q}-1}e^{b|\tau|} \tag{30.9}$$

を成立させるような十分大きな正の常數 $K_1$ が存在する．それは $G(\tau)$ の級數の收斂域內では $|\triangle_m(\tau)|$ の大さは $O(|a_m|\cdot|\tau|^{\frac{m}{q}-1})$ のものでありその外の積分路に沿うて $|\tau|\to\infty$ となるときの $|\triangle_m(\tau)|$ の行動は $|G(\tau)|$ の行動かさもなければ $|a_m|\cdot|\tau|^{\frac{m}{q}-1}$ の行動で表わされるからである．

そこでいま $\tau=te^{i\chi}$ とおいて $\tau$ の代わりに正なる變數 $t$ を用い，また簡單のため $z=\zeta e^{-i\chi}$ とおけば

$$f(z)=f(\zeta e^{-i\chi})=e^{i\chi}\int_0^\infty e^{-\zeta t}G(te^{i\chi})dt$$
$$=e^{i\chi}\int_0^\infty e^{-\zeta t}\left[\sum_{n=1}^{m-1}a_n t^{\frac{n}{q}-1}e^{i\left(\frac{n}{q}-1\right)\chi}\right]dt+R_m,$$
$$R_m=e^{i\chi}\int_0^\infty e^{-\zeta t}\triangle_m(te^{i\chi})dt$$

となる．周廻積分を用いて容易に證明される公式 ((37.1) をみよ)

$$\int_0^\infty e^{-\alpha t}t^{z-1}dt=\frac{\Gamma(z)}{\alpha^z},\qquad (\Re z>0,\ \Re\alpha>0) \tag{30.10}$$

を用いれば

$$f(z)=\sum_{n=1}^{m-1}a_n e^{i\frac{n}{q}\chi}\int_0^\infty e^{-\zeta t}t^{\frac{n}{q}-1}dt+R_m \tag{30.11}$$
$$=\sum_{n=1}^{m-1}a_n e^{i\frac{n}{q}\chi}\frac{\Gamma\left(\frac{n}{q}\right)}{\zeta^{\frac{n}{q}}}+R_m,\qquad \text{但し } \Re\zeta>0$$
$$=\sum_{n=1}^{m-1}a_n\frac{\Gamma\left(\frac{n}{q}\right)}{z^{\frac{n}{q}}}+R_m$$

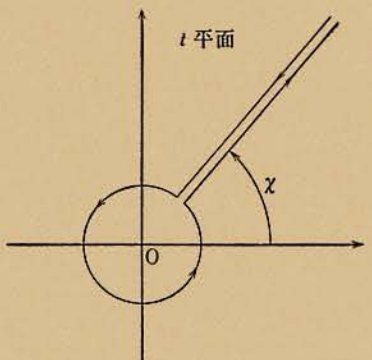
となる．そして

$$|R_m|\leq\int_0^\infty e^{-\Re\zeta\cdot t}|\triangle_m(te^{i\chi})|dt \tag{30.12}$$
$$\leq K_1\int_0^\infty e^{-\Re\zeta\cdot t}t^{\frac{m}{q}-1}e^{bt}dt$$
$$=K_1\int_0^\infty e^{-[\Re\zeta-b]t}t^{\frac{m}{q}-1}dt$$
$$=K_1\frac{\Gamma\left(\frac{m}{q}\right)}{[\Re(ze^{i\chi})-b]^{\frac{m}{q}}},\qquad \Re(ze^{i\chi})-b>0$$

が成立つ．いま $z=re^{i\theta}$ とおけば $\Re(ze^{i\chi})=r\cos(\theta+\chi)$．假定により $|\theta+\chi|\leq\frac{\pi}{2}-\delta$ であるから $\cos(\theta+\chi)\geq\sin\delta$，したがって $r\cos(\theta+\chi)\geq r\sin\delta$．よって $\Re(ze^{i\chi})-b>0$ なる條件は $r=|z|>b/\sin\delta$ であれば滿足される．かくて $|\arc z+\chi|\leq\frac{\pi}{2}-\delta<\frac{\pi}{2}$ で $|z|>b/\sin\delta$ であれば

$$|z^{\frac{m}{q}}R_m|<K_1\frac{\Gamma\left(\frac{m}{q}\right)|z|^{\frac{m}{q}}}{(|z|\sin\delta-b)^{\frac{m}{q}}}=O(1). \tag{30.13}$$

これで定理が證明せられた．




第 26 圖

さて始めに述べた問題を考えるに，Hankel の積分公式 (23.8)[1] では正實軸に沿うての積分であるが，實軸と $\chi$ (但し $|\chi|<\frac{\pi}{2}$) なる角をなす半直線に沿う圖の如き路を $C$ とするときにも

$$\text{(30.14)}\qquad \Gamma(z)=-\frac{1}{2i\sin\pi z}\int_C e^{-t}(-t)^{z-1}dt$$

と表わされることを注意する．それは $t=\rho e^{i\varphi}$ $(\rho=|t|)$ とおいて (23.3) を取扱ったと同じ方法を用いると，假定 $|\chi|<\frac{\pi}{2}$ に加うるにまず $|\arc z|<\frac{\pi}{2}$ なる假定の下に

$$\begin{aligned}\int_C e^{-t}(-t)^{z-1}dt&=\lim_{\delta\to 0}\left[\int_\infty^\delta e^{-\rho e^{i\chi}+(z-1)[\ln\rho+i(\chi-\pi)]}e^{i\chi}d\rho\right.\\&\qquad\left.+\int_\delta^\infty e^{-\rho e^{i\chi}+(z-1)[\ln\rho+i(\chi+\pi)]}e^{i\chi}d\rho\right]\\&=-2ie^{i\chi z}\cdot\sin\pi z\int_0^\infty e^{-\rho e^{i\chi}}\rho^{z-1}d\rho\\&=-2ie^{i\chi z}\sin\pi z\cdot\frac{\Gamma(z)}{(e^{i\chi})^z}\\&=-2i\sin\pi z\cdot\Gamma(z)\end{aligned}$$

が成立つことが示され，次いで前と同様に $z=0,-1,\cdots\cdot$ 以外のすべての $z$ にたいしても成立つことが歸結されるからである．

そこで

$$\Gamma(z)=\frac{\Gamma(z+1)}{z}=-\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{2i\sin\pi(z+1)}\int_C e^{-t}(-t)^z dt$$

に於て $t=zu$ とおいて變數 $u$ に變換すれば，$u$ についての積分路を $C'$ とするとき

$$\begin{aligned}\Gamma(z)&=\frac{1}{2i\sin\pi z}\cdot z^z\int_{C'}e^{-zu}(-u)^z du\\ \text{(30.15)}\qquad&=\frac{1}{2i\sin\pi z}\cdot z^z e^{-z}\int_{C'}(-e^{1-u}u)^z du\end{aligned}$$

となる．$z=re^{i\theta}$ を固定して考えれば，$u=\frac{\rho}{r}e^{i(\varphi-\theta)}$ であるから，$u$ についての積分路 $C'$ は偏角 $\chi-\theta$ の方向からきて原點のまわりを正の向きに一周し再びもとの方向に沿うて無限遠に歸るものである．但し始めの直線に沿うては

1) E. T. Copson, *An Introduction to the Theory of Functions of a Complex Variable*, 1935, p. 220 では Euler の積分から出發している．

$$\ln(-u)=\ln\frac{\rho}{r}+i(\chi-\pi-\theta),$$

後の直線に沿うては

$$\ln(-u)=\ln\frac{\rho}{r}+i(\chi+\pi-\theta)$$

とせねばならない．そして原點のまわりの積分は $O(\delta^{x+1})$ であるから，$\Re z=x>-1$ の假定の下では $\delta\to 0$ にやって，次の表示が得られる．

$$\Gamma(z)=z^z e^{-z}\int_0^{\infty\cdot e^{i(\chi-\theta)}}(e^{1-u}u)^z du. \tag{30.16}$$

この積分に於て $(e^{1-u}u)^z=e^{-z(u-1-\ln u)}$ と書き

$$\tau=u-1-\ln u \tag{30.17}$$

なる變換を行う．但し $\ln u$ は主値である．すると

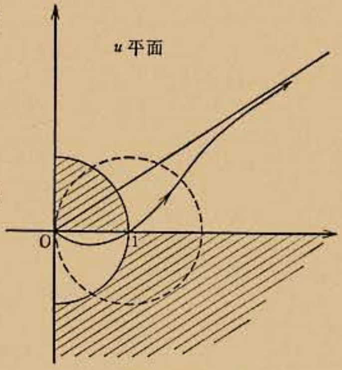
$$\frac{d\tau}{du}=1-\frac{1}{u},\qquad \frac{d^2\tau}{du^2}=\frac{1}{u^2} \tag{30.18}$$

で $u=1$ に於て $\dfrac{d\tau}{du}=0$，$\dfrac{d^2\tau}{du^2}\neq 0$ であるから，$u$ 平面上に於て $u=1$ は函數 $\tau$ の一次の交叉點であり，$\tau$ 平面上に於て對應する點 $\tau=0$ は函數 $u$ の一次の分岐點である．よっていま $u-1=w$ とおいて $w=0$ に於て展開すれば

$$\tau=w-\ln(1+w)=\frac{w^2}{2}-\frac{w^3}{3}+\cdots\cdots \tag{30.19}$$

となるが，これに (16.19) について調べた結果を適用すれば，逆要素は

$$\begin{cases} w=c_0\zeta+c_1\zeta^2+c_2\zeta^3+\cdots\cdots=u-1,\\ 2\tau=\zeta^2 \end{cases} \tag{30.20}$$



第 27 圖

で與えられる．ここに係數は

$$c_0=1,\quad c_1=\frac{1}{3},\quad c_2=\frac{1}{36},\quad c_3=-\frac{1}{270},\quad c_4=\frac{1}{4320},\quad \cdots\cdot$$

となる．$\tau=0$ に最も近い函數 $u$ の特異點は同じく $u=1$ に對應する分岐點 $\tau=\pm 2\pi i$ であるから，級數 (30.20) は $|\tau|<2\pi$ に於て收斂する．但し $\tau=0$ は分岐點であるから除外する．いま $0<u<1$ を含む分枝を $u_1$，$u>1$ を含む分枝を $u_2$ と記せば，$|\tau|<2\pi$ に於てそれぞれ

$$\begin{cases} u_1=1-(2\tau)^{\frac{1}{2}}+c_1(2\tau)-c_2(2\tau)^{\frac{3}{2}}+c_3(2\tau)^2-\cdots\cdot,\\ u_2=1+(2\tau)^{\frac{1}{2}}+c_1(2\tau)+c_2(2\tau)^{\frac{3}{2}}+c_3(2\tau)^2+\cdots\cdot \end{cases} \tag{30.21}$$

と展開される．但し平方根は主値をとる．

そこで (30.16) の積分を $u=1$ を過る路に變形し

$$z^{-z}e^{z}\Gamma(z)=\int_0^1(e^{1-u}u)^z du+\int_1^{\infty\cdot e^{i(\chi-\theta)}}(e^{1-u}u)^z du$$

とわけておのおのに變換 (30.17) を行えば

$$z^{-z}e^{z}\Gamma(z)=\int_0^{\infty\cdot e^{i(\chi-\theta)}}e^{-z\tau}\left(\frac{du_2}{d\tau}-\frac{du_1}{d\tau}\right)d\tau \tag{30.22}$$

と書かれる．これに Watson の補助定理を用いる．但しこの定理の前提の中始めの部分は (30.21) で示されたが，後の部分は

$$\frac{du_2}{d\tau}-\frac{du_1}{d\tau}=\frac{u_2}{u_2-1}+\frac{u_1}{u_1-1} \tag{30.23}$$

が偏角 $\chi-\theta$ なる直線に沿うて有界なることから明らかに滿足される．

かくて補助定理により，$|z|$ が大なるとき

$$z^{-z}e^{z}\Gamma(z)\sim\sqrt{\frac{2}{z}}\left\{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)+3c_2\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\frac{2}{z}+5c_4\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)\left(\frac{2}{z}\right)^2+\cdots\cdots\right\}$$

$$=\sqrt{\frac{2\pi}{z}}\left\{1+\frac{3c_2}{z}+\frac{15c_4}{z^2}+\cdots\cdots\right\},$$

したがって

$$\Gamma(z)\sim z^{z}e^{-z}\sqrt{\frac{2\pi}{z}}\left\{1+\frac{1}{12z}+\frac{1}{288z^2}+\cdots\cdots\right\} \tag{30.24}$$

が成立つ．

ところでこの漸近展開式の成立つ角領域はどうかというに，(30.22) の右邊は明らかに主要領域 $|\arc z|<\pi$ において存在して左邊に等しいから，(30.24) は $|\arc z|<\pi$ で成立つわけである．

**問 1.** $x$ が有限，$|y|$ が大なるとき

$$|\Gamma(x+iy)|\sim\sqrt{2\pi}|y|^{x-\frac{1}{2}}e^{-\frac{\pi}{2}|y|}$$

を證明せよ．

# 第 3 章　ガンマ函數の數値計算と等角寫像

## §31. 實ガンマ函數の數値計算

$\log\Gamma(x+1)\equiv\log\Pi(x)$ および $\Psi(x+1)$ の最初の大きな表を算出したのは數値計算の稀な天才でもあった偉大な K.F. Gauss で 1813 年のことであった．おのおの $x=0.00$ から $x=1.00$ まで 0.01 の間隔で前者は 20 桁，後者は 18 桁が與えられた．しかし以後の表集成並びに表作成に最もよく利用せられたのは A. M. Legendre によって計算された $\log\Gamma(x)$ の表である．それは $x=1.000$ から $x=2.000$ まで 0.001 の間隔で 12 桁の値を與えている．1816 年 "Exercises de Calcul Intégral" に始めて發表され 1826 年 "Traité des Fonctions Elliptiques et des Intégrales Eulériennes, avec des Tables pour en faciliter le calcul numérique." Tome 2 に轉載せられた後 1921 年には Karl Pearson によって Tracts for Computers No. IV に收められ，また H.T. Davis の Tables of the Higher Mathematical Functions, Vol. I にも載せられている．では Legendre はいかに計算を設計したか，それは大體次の通りであった．

(24.3) の $\ln\left(1+\frac{z}{n}\right)$ を展開して公式

$$\ln\Gamma(z+1)=-Cz+\frac{S(2)}{2}z^2-\frac{S(3)}{3}z^3+\frac{S(4)}{4}z^4-\cdots\cdot \tag{31.1}$$

を作る．次に (14.5) の對數

$$\frac{1}{2}\ln\frac{\sin\pi z}{\pi z}=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\ln\left(1+\frac{z}{n}\right)+\ln\left(1-\frac{z}{n}\right)\right]$$

を (24.3) に邊々加えて

$$\ln\Gamma(z+1)=-\frac{1}{2}\ln\frac{\sin\pi z}{\pi z}-Cz-\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{2}\ln\frac{n+z}{n-z}-\frac{z}{n}\right].$$

この右邊を $z=0$ の近傍で冪級數に展開して公式

$$\ln\Gamma(z+1)=-\frac{1}{2}\ln\frac{\sin\pi z}{\pi z}-Cz-\sum_{r=1}^{\infty}\frac{S(2r+1)}{2r+1}z^{2r+1},\quad |z|<1 \tag{31.2}$$

を作る．これは (31.1) より收斂がはやいが，Legendre はなおこの兩邊に

$$0=-\frac{1}{2}\ln\frac{1+z}{1-z}+z+\sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{2r+1}z^{2r+1}$$

を邊々加えて，さらに收斂のはやい公式

$$\ln\Gamma(z+1)=-\frac{1}{2}\left[\ln\frac{\sin\pi z}{\pi z}+\ln\frac{1+z}{1-z}\right]+(1-C)z-\sum_{r=1}^{\infty}\frac{S(2r+1)-1}{2r+1}z^{2r+1} \tag{31.3}$$

に變えた．なお (31.2) に於て $z$ の代りに $2z$ とおいた式から (31.2) をひけば，(26.6) により

$$\ln\Gamma\left(z+\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}\ln\pi-\frac{1}{2}\ln\cos\pi z-(C+2\ln 2)z-\sum_{r=1}^{\infty}(2^{2r+1}-1)\frac{S(2r+1)}{2r+1}z^{2r+1} \tag{31.4}$$

が得られ，これに恒等式

$$0=-\frac{1}{2}\ln\frac{1+2z}{1-2z}+2z+\sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{2r+1}(2z)^{2r+1}$$

を加えて上と同樣に變形すると，次の公式が得られる．

$$\ln\Gamma\left(z+\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}\ln\pi-\frac{1}{2}\left[\ln\cos\pi z+\ln\frac{1+2z}{1-2z}\right]+\Psi\left(\frac{3}{2}\right)z-\sum_{r=1}^{\infty}b_{2r+1}(2z)^{2r+1}, \tag{31.5}$$

ここに
$$\Psi\left(\frac{3}{2}\right)=2-C-2\ln 2,$$

および
$$b_{2r+1}=\frac{(1-2^{-2r-1})S(2r+1)-1}{2r+1}=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{(2r+1)(2m+1)^{2r+1}}.$$

Legendre は $x$ が非常に小さいときは公式 (31.1)，やや大きくなれば公式 (31.3) を用いて，まず $x=1.001$ から $x=1.250$ までの $\ln\Gamma(x)$ の値を算出した．すると公式

$$\Gamma(2-x)=\frac{\pi x(1-x)}{\sin\pi x\cdot\Gamma(1+x)} \tag{31.6}$$

によって既出の値から $x=1.750$ から $x=2.000$ までの値が算出できる．次に公式

$$\begin{cases}\Gamma\left(\dfrac{3}{2}-x\right)=\dfrac{\sqrt{\pi}\,4^x\left(\dfrac{1}{2}-x\right)\Gamma(1+x)}{\cos\pi x\cdot\Gamma(1+2x)}\\[2ex]\Gamma\left(\dfrac{3}{2}+x\right)=\dfrac{\sqrt{\pi}\left(\dfrac{1}{2}+x\right)\Gamma(1+2x)}{4^x\Gamma(1+x)}\end{cases} \tag{31.7}$$

を $x=0.001$ から $x=0.125$ にたいし用いて $x=1.375$ から $x=1.625$ までの函數値が得られる．次には公式

$$\begin{cases}\Gamma(1+x)=\dfrac{\sqrt{\pi}\left(\dfrac{1}{2}+x\right)\Gamma(1+2x)}{4^x\Gamma\left(\dfrac{3}{2}+x\right)}\\[2ex]\Gamma(2-x)=\dfrac{\pi x(1-x)}{\sin\pi x\cdot\Gamma(1+x)}\end{cases} \tag{31.8}$$

によって $x=1.250$ から $x=1.312$ までの函數値をだす．(既出の値が使えるには $2x$ が 0.500 から 0.625 まで，$\dfrac{3}{2}+x$ が 1.750 から 1.812 まで變わるとせねばならない．同樣に第二の式に於ては $x$ は 0.250 から 0.312 まで變える)．

次にこれまでに得られた値をもとにして再び公式 (31.7) により

$$x=\frac{3}{2}-0.156=1.344 \quad \text{から} \qquad x=\frac{3}{2}-0.125=1.375 \quad \text{まで}$$

および
$$x=\frac{3}{2}+0.125=1.625 \quad \text{から} \qquad x=\frac{3}{2}+0.156=1.656 \quad \text{まで}$$

の値をだす. 次に再び公式 (31.8) を用いるという風に進んでいくと, 計算範圍は次のように二つの限界 1.3333‥‥ および 1.6666‥‥ に向って擴げられる.

$$1.001\sim1.250\rightarrow1.312\rightarrow(1.333)\leftarrow1.344\leftarrow1.375\sim1.625\rightarrow1.656\rightarrow(1.667)\leftarrow1.688\leftarrow(1.750\sim2.000).$$

以上は Legendre のとった方法であるが, 或は, 例えば $x=0.50$ から $x=1.00$ までの $\ln\Gamma(x)$ の基本的な値をまずだし, かくして得られた表を 10 等分するのも一法であろう. 即ち必要な精度に十分はやく收斂する漸近級數によって例えば $x=22.50$ から $x=23.00$ までの $\ln\Gamma(x)$ の値をだせば, $x=1.5$ から 2 までの範圍の値は

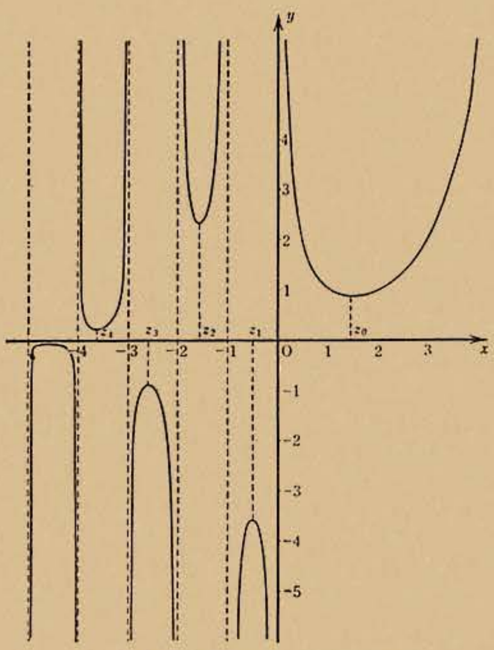
$$\log\Gamma(1+a)=\log\Gamma(22+a)-\log(21+a)$$
$$-\log(20+a)-\cdots\cdots-\log(1+a)$$

の様に對數をひいて得られる.

負の變數値にたいする値の計算には公式

$$\log|\Gamma(-x)|=\log|\Gamma(1-x)|-\log|-x|,$$
$$\log|\Gamma(-x)|=\log\pi-\log\Gamma(1+x)$$
$$-\log|\sin\pi x|$$

を用いればよい. $\Gamma(x)$ のグラフは圖のようになるがその特性は次節の取調べによって明らかにされるであろう.



第 28 圖　實ガンマ函數のグラフ

## §32. 實ブサイ函數の數値計算, $\Psi(z)$ の零點

(24.4) に於て $\Psi(z)+\frac{1}{z}=\Psi(z+1)$ とし $z+1$ を $z$ と書けば

$$\Psi(z)=-C+\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+z}\right) \tag{32.1}$$

となる. よって $z=x+iy$ とおけば

$$\Psi(x+iy)=-C+\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{n+1}-\frac{x+n}{(x+n)^2+y^2}\right)+iy\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(x+n)^2+y^2}$$

となり, この虚數部は $y$ が 0 のときまたこのときにのみ 0 となるから, $\Psi(z)$ は實零點のみをもつことがわかる. よってこの零點を定め且つ實 $\Psi$ 函數のグラフを描くに必要な公式を用意しよう.

$\Psi(z)$ は $z=0,-1,-2,\cdots\cdots$ に於て一位の極をもつ以外では有限 $z$ 平面に於て正則従って連續な函數である．$\Gamma(z)$ の相補定理 (22.15) からただちに $\Psi(z)$ の相補定理

(32.2) $$\Psi(z)-\Psi(1-z)=-\pi\cot\pi z$$

が従う．また乘法定理 (26.2) に於て $z=\dfrac{1}{k}$ ($k$ は自然數) とおけば

$$\sum_{r=1}^{k-1}\Psi\left(\frac{r}{k}\right)=-(k-1)C-k\ln k$$

となり，特に $k=2$ のときは

(32.3) $$\Psi\left(\frac{1}{2}\right)=-C-2\ln 2$$

となる．これに (24.2) を用いると $n$ が自然數のとき次の關係が得られる．

(32.4) $$\Psi\left(\frac{1}{2}-n\right)=\Psi\left(\frac{1}{2}+n\right)=\Psi\left(\frac{1}{2}\right)+2\left(1+\frac{1}{3}+\cdots\cdots+\frac{1}{2n-1}\right).$$

$\Psi\left(\dfrac{1}{2}\right)$ は負であるが (32.4) の値はすべて正である．

(32.5) $$\Psi'(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+z)^2}$$

は實なる $z$ にたいしては常に正であるから，$\Psi(z)$ は連續なところでは $z$ の增加函數である．

(32.6) $$\Psi'(1)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=S(2)=\frac{\pi^2}{6},$$

そして $\Psi'(z)$ は定差方程式

(32.7) $$F(z+1)-F(z)=-\frac{1}{z^2}$$

をみたすから

(32.8) $$\Psi'(n)=\frac{\pi^2}{6}-\sum_{r=1}^{n-1}\frac{1}{r^2}\qquad (n>1)$$

である．また相補定理

(32.9) $$\Psi'(z)+\Psi'(1-z)=\frac{\pi^2}{\sin^2\pi z}$$

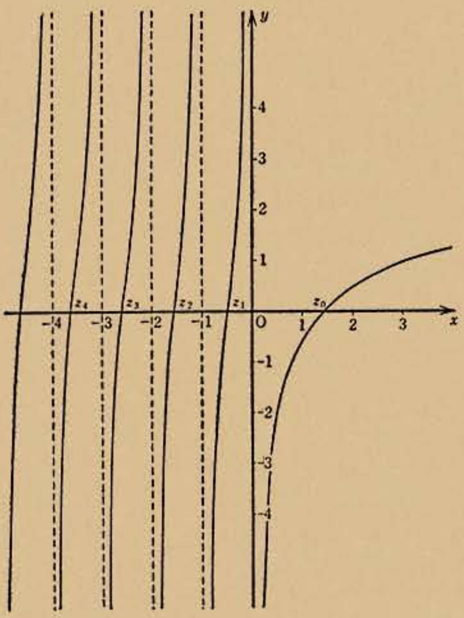
が成立つから，これより

(32.10) $$\begin{cases}\Psi'\left(\dfrac{1}{2}-n\right)=\dfrac{\pi^2}{2}+\displaystyle\sum_{r=1}^{n}\frac{4}{(2r-1)^2},\\[2ex] \Psi'\left(\dfrac{1}{2}+n\right)=\dfrac{\pi^2}{2}-\displaystyle\sum_{r=1}^{n}\frac{4}{(2r-1)^2}\end{cases}$$

が従う．

實 $\Psi(z)$ は $z=0$ および $-n$ $(n=1,2,\cdots\cdots)$ に一位の極をもつが區間 $(-n,-n+1)$ では增加な連續函數であり, (32.4) により $\Psi\left(\frac{1}{2}-n\right)$ は正であるから, 區間 $\left(-n,-n+\frac{1}{2}\right)$ の上にそれぞれただ一つの單根 $z_n$ $(n=1,2,\cdots\cdots)$ をもつ. 次に $\Psi(1)<0$, $\Psi\left(\frac{3}{2}\right)>0$ で $\Psi(z)$ は區間 $(0,\infty)$ で增加な連續函數であるから $\Psi(z)$ には正の單根 $z_0$ がただ一つ區間 $\left(1,\frac{3}{2}\right)$ の上にあることがわかる. $z_0=1.46163\,21451$ は Gauss によって算出された.

$\Psi(z)=\dfrac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}$ で $\Gamma(z)$ は 0 になることはないから $z_0>0$, $z_n\,(n=1,2,\cdots\cdots)<0$ はまた $\Gamma'(z)$ の單根であって $\Gamma'(z)$ はこれらの點以外には零點をもたないことがわかる. 實 $\Gamma(z)$ はこれらの點で極小値または極大値をとるわけである. $\Gamma(z+1)=z\Gamma(z)$ なる關係があるから $\Gamma(z_n)$ の絕對値は $n$ が大になるとともに限りなく小さくなる. また (19.1) により $x>0$ にたいしては $\Gamma(x)>0$ であるから $\Gamma(x)$ は




第 29 圖 實 $\Psi(z)$ のグラフ

區間 $(-1,0)$, $(-2,-1)$, $(-3,-2)$, $\cdots\cdots$ に於て次々に符號を變えるわけで, 第 1 の區間では負, 第 2 の區間では正, $\cdots\cdots$ という風になる. これで第 28 圖の實ガンマ函數のグラフが明らかにされた.

(32.2) に於て $z=z_n$ とおけば

(32.11) $$\Psi(1-z_n)=\pi\cot\pi z_n,\quad (n=1,2,\cdots\cdots).$$

いま

$$z_n=-n+y_n$$

とおけば, 上に述べたように

$$0<y_n<\frac{1}{2}$$

で, (32.11) は

(32.12) $$\Psi(n+1-y_n)=\pi\cot\pi y_n$$

となる. ところで $\Psi(z)$ の漸近級數から[1]従うように,

$$\Psi(n+1-y_n)=\ln n+\delta_n$$

1) (27.18) を對數微分すれば

$$\Psi(z)=\ln z-\frac{1}{2z}+\frac{d\mu(z)}{dz}$$

を得. この $\mu(z)$ に例えば $|\arc z|<\pi$ で成立つ (28.9) を用いて考えれば, 角領域 $|\arc z|\leqq\pi-\delta$ $(\delta>0)$ に於て $z\to\infty$ のとき $d\mu(z)/dz\to 0$, 從って $\Psi(z)-\ln z\to 0$ がわかる.

とおけば，$n\to\infty$ のとき $\delta_n\to 0$ である．よって (32.12) より

$$y_n=\frac{1}{\pi}\tan^{-1}\left(\frac{\pi}{\ln n+\delta_n}\right)$$

と書かれるが，さらに (11.9) を用いると

$$y_n=\frac{1}{\ln n}+\frac{\delta_n'}{(\ln n)^2},\qquad \delta_n'\to 0\quad (n\to\infty \tag{32.13}$$

と書かれることがわかる．しかし實際の數値は Davis の $\Psi(z)$ の表に於て逆補間することによって精密に定めることができる (次表).

| $w=\Gamma(z)$ の交叉點 $z_i$ | $z=\Gamma^{-1}(w)$ の分岐點 $w_i=\Gamma(z_i)$ | $u_i=\ln\|\Gamma(z_i)\|$ |
|---|---|---|
| $z_0=+1.461632$ | $+0.8856032$ | $-0.121486$ |
| $z_1=-0.504083$ | $-3.544644$ | $1.265433$ |
| $z_2=-1.573498$ | $+2.302407$ | $0.833955$ |
| $z_3=-2.610721$ | $-0.888136$ | $-0.118630$ |
| $z_4=-3.635293$ | $+0.245128$ | $-1.405977$ |
| $z_5=-4.653238$ | $-0.052780$ | $-2.941630$ |
| $z_6=-5.667162$ | $+0.0093246$ | $-4.675100$ |
| $z_7=-6.678418$ | $-0.0013974$ | $-6.573144$ |
| $z_8=-7.687788$ | $+0.00018188$ | $-8.612172$ |
| $z_9=-8.695764$ | $-0.000020925$ | $-10.774552$ |

§31 の冒頭に述べたように，$\Psi(x+1)$ の最初の大きな表が Gauss により公表されたのであるが，その際 $p,q$ を自然數として $\Psi\left(\frac{p}{q}\right)$ および $\Psi\left(1-\frac{p}{q}\right)$ を算出する次の公式が利用された．

$$\begin{cases}\Psi\left(\frac{p}{q}\right)=-\frac{\pi}{2}\cot\left(\frac{\pi p}{q}\right)-C-\ln q+S,\\[2mm] \Psi\left(1-\frac{p}{q}\right)=\frac{\pi}{2}\cot\left(\frac{\pi p}{q}\right)-C-\ln q+S,\end{cases} \tag{32.14}$$

ここに

$$S=\sum_{r=1}^{(q-1)/2}\cos\frac{2\pi rp}{q}\ln\left(4\sin^2\frac{\pi r}{q}\right),\quad (q\ \text{奇數})$$

$$S=\sum_{r=1}^{(q-2)/2}\cos\frac{2\pi rp}{q}\ln\left(4\sin^2\frac{\pi r}{q}\right)+(-1)^p\ln 2,\quad (q\ \text{偶數}).$$

しかしこのときも $x$ の十分大きな値にたいする $\Psi(x)$ を漸近公式で出し，それから關係

$$\Psi(x)=\Psi(x+1)-\frac{1}{x}$$

によって次第に下って基本的な値をだすのもよい方法であろう．

## §33. 複素 $\Gamma$ 函數の數値計算

複素變數 $z=x+iy$ のガンマ函數の値を §17 に述べた考に從って

$$w=\Gamma(z)=e^{u+iv} \qquad (\text{卽ち } \ln\Gamma(z)=u+iv) \tag{33.1}$$

と表わそう．よって

$$u=\ln|\Gamma(z)|, \qquad v=\operatorname{arc}\Gamma(z) \tag{33.2}$$

である．また $u,v$ が知れると

$$\mathfrak{R}\Gamma(z)=e^u\cos v, \qquad \mathfrak{Im}\,\Gamma(z)=e^u\sin v \tag{33.3}$$

が計算され，共軛複素數 $\bar{z}=x-iy$ にたいする値は

$$\mathfrak{R}\Gamma(\bar{z})=\mathfrak{R}\Gamma(z), \qquad \mathfrak{Im}\,\Gamma(\bar{z})=-\mathfrak{Im}\,\Gamma(z) \tag{33.4}$$

で求められる．

本書に收めたのは $-10\leqq x\leqq 10,\ 0\leqq y\leqq 10$ なる $z=x+iy$ にたいする $u,v$ の値の小數 6 位まで有效な表である．$x$ および $y$ の間隔はいずれも 0.1 または 0.2 で十分精密に挿入ができる．上の範圍外にある $z=z^*$ にたいする $u,v$ を求めたければ次のようにすればよい．(33.4) の簡單な關係があるから $\mathfrak{Im}\,z^*>0$ と假定してよい．

まず

$$-10\leqq\mathfrak{R}z^*-n\leqq 10, \qquad 0\leqq\frac{\mathfrak{Im}\,z^*}{k}\leqq 10 \tag{33.5}$$

をみたす整數 $n$ および正整數 $k$ を定め

$$z=\frac{z^*-n}{k}$$

とおくと，$k$ 個の數

$$z+\frac{r}{k} \qquad (r=0,1,\cdots\cdots,k-1)$$

は本書の表の $z$ の範圍に入る．そこで乘法定理により

$$\ln\Gamma(z^*-n)=\ln\Gamma(kz)=\left(kz-\frac{1}{2}\right)\ln k-\frac{k-1}{2}\ln(2\pi)+\sum_{r=0}^{k-1}\ln\Gamma\left(z+\frac{r}{k}\right) \tag{33.6}$$

を計算し，次いで公式

$$\left\{\begin{aligned}&\ln\Gamma(z^*)=\ln\Gamma(z^*-n)+\ln(z^*-n)+\ln(z^*-n+1)+\cdots\cdots+\ln(z^*-1)\\&\text{或は}\\&\ln\Gamma(z^*)=\ln\Gamma(z^*+n)-\ln(z^*+n-1)-\ln(z^*+n-2)-\cdots\cdots-\ln(z^*)\end{aligned}\right. \tag{33.7}$$

によって求むる値が得られる．

次に表を作成した方法を說明しよう．

1°. まず $x=0.5(0.1)1.0$, $y=0.0(0.1)2.0$ および $2.0(0.2)4.0$ にたいする $u,v$ の基本的値を Binet の第二公式 (25.20) によって小数 8 位まで有効に定める．同公式の積分内にある $\tan^{-1}\dfrac{t}{z}$ を分解して

$$\tan^{-1}\frac{t}{z}=\alpha=\xi+i\eta$$

とすれば

$$\frac{t}{z}=\tan\alpha=\frac{1}{i}\,\frac{e^{i2\alpha}-1}{e^{i2\alpha}+1}.$$

これを $e^{i2\alpha}$ について解くと

$$e^{i2\alpha}=\frac{z+it}{z-it}=\frac{x+i(y+t)}{x+i(y-t)}.$$

いまは $(x,y)$ は第一象限の點であり $t$ は $>0$ である．上式は書きなおすと

$$e^{-2\eta}\,e^{i2\xi}=\sqrt{\frac{x^2+(y+t)^2}{x^2+(y-t)^2}}\exp\left\{i\left[\tan^{-1}\frac{y+t}{x}-\tan^{-1}\frac{y-t}{x}\right]\right\}$$

となるから

$$2\eta=-\frac{1}{2M}\log\left(\frac{x^2+y^2+t^2+2yt}{x^2+y^2+t^2-2yt}\right).$$

ここに $M=\log e$ である．また

$$2\xi=\tan^{-1}\frac{y+t}{x}-\tan^{-1}\frac{y-t}{x}$$

に於て點 $(x,y+t)$ は第一象限，點 $(x,y-t)$ は第一象限または第四象限の中にあるから，$0<2\xi<\pi$ であって，

$$\tan 2\xi=\left(\frac{y+t}{x}-\frac{y-t}{x}\right)\Big/\left(1+\frac{y+t}{x}\cdot\frac{y-t}{x}\right)=\frac{2xt}{x^2+y^2-t^2},$$

$$\therefore\qquad \cot 2\xi=\frac{x^2+y^2-t^2}{2xt}=\tan\left(\frac{\pi}{2}-2\xi\right).$$

よって

$$2\xi=\frac{\pi}{2}-\tan^{-1}\frac{x^2+y^2-t^2}{2xt}.$$

なお (25.20) の積分の前の項を分解すると，結局第一象限内の $(x,y)$ にたいして次の計算公式が得られる．

$$u=\frac{1}{2M}\left(x-\frac{1}{2}\right)\log(x^2+y^2)-y\tan^{-1}\frac{y}{x}-x+\frac{1}{2M}\log 2\pi+\int_0^\infty\frac{\dfrac{\pi}{2}-\tan^{-1}\dfrac{x^2+y^2-t^2}{2xt}}{e^{2\pi t}-1}dt, \tag{33.8}$$

$$(33.9)\qquad v=\left(x-\frac{1}{2}\right)\tan^{-1}\frac{y}{x}+\frac{1}{2M}y\log(x^2+y^2)-y$$

$$-\int_0^\infty\frac{\frac{1}{2M}\log\left(\frac{x^2+y^2+t^2+2yt}{x^2+y^2+t^2-2yt}\right)}{e^{2\pi t}-1}dt.$$

この中の無限積分を

$$\int_0^\infty=\int_0^1+\int_1^2+\int_2^3+\int_3^\infty$$

とわけると，最後の積分は無視でき，最初の三つの積分をそれぞれ **5 縱線の** Gauss **の積分公式**[1)]

$$(33.10)\qquad \int_0^1 F(t)dt=0.2844\,4444\,F(t_0)+0.2393\,1434\,[F(t_{-1})+F(t_1)]$$

$$+0.1184\,6344\,[F(t_{-2})+F(t_2)],$$

但し $t_{-2}=0.0469\,10077,\quad t_{-1}=0.2307\,6534,\quad t_0=0.5,$

$t_1=0.7692\ \ 3466,\quad t_2=0.9530\,8992$

によって算出した．この公式により積分が小數 8 位まで有效にだせることは，6 縱線の公式による算出值と一致することで確かめられる．この計算に必要な常用對數は

J. Bauschinger und J. Peters, Logarithmisch-Trigonometrische Tafeln mit acht Dezimalstellen, Leipzig. 1936 から，また逆正切函數は表差附きの八桁函數表[2)] を用意して用いた．

［注意］ 上に掲げた $x,y$ の組中特に $x=0.5$, $y=0.0(0.1)2.0$ および $2.0(0.2)10.0$ にたいする $u$ は (22.19) から從うところの

$$u=\frac{1}{2M}\log\pi-\frac{1}{2M}\log\cosh\pi y$$

を用いて，また $x=1.0$, $y=0.0(0.1)2.0$ および $2.0(0.2)10.0$ にたいする $u$ は

$$u=\frac{1}{2M}\log\pi+\frac{1}{2M}(\log y-\log\sinh\pi y)$$

を用いてだす．その際必要な $\sinh\pi y$, $\cosh\pi y$ の值は British Ass. Adv. Sci. 發行の Math. Tables, Vol. I (1931) を利用した．

2°. 次に $x=0.5(0.1)1.0$, $y=4.0(0.4)10.0$ にたいする $u,v$ の值は Stirling の級數 (27.16) を用いて有效 8 位までだす．$z=re^{i\theta}$ とすれば級數の部分は

(33.11)

$$\sum=\frac{1}{12}\cdot\frac{\cos\theta}{r}-\frac{1}{360}\cdot\frac{\cos 3\theta}{r^3}+\frac{1}{1260}\cdot\frac{\cos 5\theta}{r^5}-\frac{1}{1680}\cdot\frac{\cos 7\theta}{r^7}+\frac{1}{1188}\cdot\frac{\cos 9\theta}{r^9}-\cdots.$$

1) 拙著「計算法」朝倉書店，昭和 25 年．246 頁參照．

2) 拙著，八桁函數表 第一卷 指數函數，丸善出版株式會社．昭和 24 年．續刊．

$$+i\left[-\frac{1}{12}\cdot\frac{\sin\theta}{r}+\frac{1}{360}\cdot\frac{\sin 3\theta}{r^3}-\frac{1}{1260}\cdot\frac{\sin 5\theta}{r^5}+\frac{1}{1680}\cdot\frac{\sin 7\theta}{r^7}-\frac{1}{1188}\cdot\frac{\sin 9\theta}{r^9}+\cdots\right]$$

となる．ここに必要な $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ の値は角を

$$1\,\mathrm{rad}=63.6619\,733^{G}$$

によって百分度になおし

Roussilhe-Brandicourt, Tables à 8 décimales des valeurs naturelles des sinus, cosinus et tangentes (1925) を利用した．

3°. 次に $x=0.1, 0.2, 0.3, 0.4$, $0\leqq y\leqq 10$ にたいする $u, v$ の値を相補定理 (22.15) から導かれる公式

$$(33.12)\qquad \begin{cases} u(x,y)=\dfrac{1}{2M}\log\pi-\dfrac{1}{2M}\log(\sinh^2\pi y+\sin^2\pi x)-u(1-x,y), \\ v(x,y)=-\tan^{-1}\left(\dfrac{\sinh\pi y}{\tan\pi x\cosh\pi y}\right)+v(1-x,y) \end{cases}$$

によって算出した．

4°. 次に $0\leqq x\leqq 1$, $y=4.0(0.4)10.0$ にたいし得られた表を $y$ の函數 $g$ に關する Bessel の中央補間公式[1]

$$g_{0.5}=\frac{g_0+g_1}{2}-\frac{5}{8}\cdot\frac{\delta^2 g_0+\delta^2 g_1}{10}+\frac{75}{64}\cdot\frac{\delta^4 g_0+\delta^4 g_1}{100}-\frac{625}{256}\cdot\frac{\delta^6 g_0+\delta^6 g_1}{1000}+\cdots$$

によって挿入した．

以上で表の基本的部分が完成される．

5°. $x=10.0(0.1)11.0$, $y=0(0.1)2.0$ および $2.0(0.2)10.0$ にたいする $u, v$ の値を直接 Stirling の級數 (33.11) によってか，または同公式により $y=0, 1, 2, \cdots, 11, 12$ にたいする値をだしこの間隔を 10 等分または 5 等分するかして[1] だす． $x=-10.0(0.1)-11.0$, $y=2.0(0.2)10.0$ にたいする値は上の計算から容易に導かれる．但し $y=0(0.1)2.0$ にたいしてはこの公式では十分の精度が得られなかった．

6°. かくして得られた $u, v$ を基礎にして關係

$$\Gamma(z+1)=z\Gamma(z)$$

により表の範圍を $x=-10\sim 10$ に擴げる．公式は

$$(33.13)\qquad \begin{cases} u(1+x,y)=u(x,y)+\dfrac{1}{2M}\log(x^2+y^2), \\ v(1+x,y)=v(x,y)+\tan^{-1}\dfrac{y}{x}. \end{cases}$$

1) 「計算法」 311 頁．

そのため $\log(x^2+y^2)$, $\tan^{-1}\dfrac{y}{x}$ の必要な表を作成しておき，計算器の上に於ける連續計算によって，例えば一方では

$$x=0.2\to1.2\to2.2\to3.2\to4.2\to5.2$$

と昇り，他方では

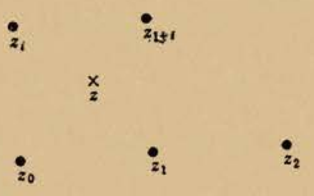
$$5.2\leftarrow6.2\leftarrow7.2\leftarrow8.2\leftarrow9.2\leftarrow10.2$$

と降り，この二つの過程で得られる $x=5.2$ に於ける二つの値を比較することによって，算出値の檢算を行うと同時に精度を確めた．

この際小數6位の ±0.5 以内の相互の食い違いは許すことにしたので，從って上のように檢算された値を小數6位までに丸めて得られた表値には大體最後の位に於て ±1 乃至 ±2 くらいの誤差があり得るわけである．

## §34.　複素直坐標式補間法

本表はそれ自身十分に細分された表であるが場合によっては補間の必要がおこるであろう．その目的には H. E. Salzer によって作成された Lagrange 式の補間公式が便利であろう[1]．それは本表のように複素平面上の正方形格子の上に表化された解析函數 $f(z)$ の $n=3,4,5,6,7$ 個補間點を用いた Lagrange 補間公式の係數を表化したものである．但しそれは $h$ を正方形格子の邊の長さ，$P\equiv p+iq$ として挿入する點を $z=z_0+Ph$ のように表わしたとき，$p$ および $q$ が 0.1 の整數倍のものだけについて與えられている．例えば圖の如き5個の補間點のときは




第 30 圖

$$f(z_0+Ph)=L_0(P)f(z_0)+L_1(P)f(z_1)+L_2(P)f(z_2)+L_i(P)f(z_i)+L_{1+i}(P)f(z_{1+i}) \tag{34.1}$$

で係數は複數引數 $P$ の次のような多項式になる．

$$\left\{\begin{aligned}
L_0(P)&=\frac{1}{4}[(-1-i)P^4+(2+6i)P^3+(3-11i)P^2+(-8+6i)P+4],\\
L_1(P)&=\frac{1}{2}[(1-i)P^4+(-5+i)P^3+(6+4i)P^2+(-4i)P],\\
L_2(P)&=\frac{1}{20}[(1+3i)P^4+(4-8i)P^3+(-9+3i)P^2+(4+2i)P],\\
L_i(P)&=\frac{1}{10}[(-3+i)P^4+(13-i)P^3+(-18-4i)P^2+(8+4i)P],\\
L_{1+i}(P)&=\frac{1}{2}[iP^4+(1-3i)P^3+(-3+2i)P^2+2P].
\end{aligned}\right. \tag{34.2}$$

---

1) A. N. Lowan and H. E. Salzer, *Coefficients for Interpolation within a Square Grid in the Complex Plane*, Jour. of Math. & Phys. **23** (1944), 156–166; H. E. Salzer, *Coefficients for Complex Quartic, Quintic, and Sextic Interpolation within a Square Grid*, ibid. **27** (1948), 136–156.

これらの係數の値が $p=0.0(0.1)1.0$, $q=0.0(0.1)1.0$ にたいし表化されているのでこのような $P$ のときはこの表を用いるのが最も便利である.

しかし $p,q$ が1桁より桁數が多いときはこのような係數の表を與えることは殆んど不可能になるので最近次のような補助法が與えられた.[1] $n$ 補間點の Lagrange の補間公式

$$\sum_{k=1}^{n} L_k(z)f(z_k) \equiv \sum_{k=1}^{n} \frac{(z-z_1)\cdot\cdot(z-z_{k-1})(z-z_{k+1})\cdots\cdot(z-z_n)}{(z_k-z_1)\cdot\cdot(z_k-z_{k-1})(z_k-z_{k+1})\cdots\cdot(z_k-z_n)} f(z_k) \tag{34.3}$$

は

$$A_k = 1/(z_k-z_1)\cdots(z_k-z_{k-1})(z_k-z_{k+1})\cdots\cdot(z_k-z_n), \tag{34.4}$$

$$a_k \equiv A_k/(z-z_k), \qquad f_k \equiv f(z_k) \tag{34.5}$$

とおくと

$$f(z) = \sum_{k=1}^{n} a_k f_k \Big/ \sum_{k=1}^{n} a_k \tag{34.6}$$

と書かれる. そこで補間點 $z_1, z_2, \cdots\cdot, z_n$ の種々の選擇にたいし $A_k$ の値を計算しておく. すると補間すべき點 $z=z_0+Ph$, $(P=p+iq)$ にたいし $a_k$ を算出すれば (34.6) によって $f(z)$ がだされるわけである. 便宜上 $A_k$ の表は附錄 II に掲げた. 5點以上の配點に於て最初のものと次のものとは表のいかなる場所にでも使え, 檢算の目的のため併用することができる. 三番目以下の配置は挿入點が最も中心となるようなものを選擇したい場合に便利なもので精度の高いことが期待される.

本書のガンマ函數表では所により $h=0.1$, 所により $h=0.2$ として上の方法が適用される.

**例 1.** $h=0.2$ として $x=0.3$, $y=1.3$ にたいする $\ln\Gamma(x+iy)=u+iv$ を補間によってだし表値と比較してみよう. $P=\frac{1}{2}(1+i)$ である.

まず4點補間法を用いると

$$\begin{matrix} ^{\circ}i & 1^{\circ}+i \\ ^{\circ}0 & ^{\circ}1 \end{matrix} \quad \begin{cases} A_0=\frac{1}{2}(1+i), \quad A_1=\frac{1}{2}(-1+i), \quad A_i=\frac{1}{2}(1-i), \\ A_{1+i}=\frac{1}{2}(-1-i) \end{cases} \tag{34.7}$$

で, $z_0=0.2+1.2i$, $z_1=0.4+1.2i$, $z_i=0.2+1.4i$, $z_{1+i}=0.4+1.4i$ にたいする $u+iv$ を表からだすと

$$\begin{matrix} -1.376584-1.402788i, & -1.311591-1.058869i \\ -1.014254-1.455487i, & -0.981202-1.106045i \end{matrix} \tag{34.8}$$

いまは挿入點は正方形の中點で

$$a_0=a_1=a_i=a_{1+i}=1, \qquad \therefore\ \Sigma a_k=4$$

---

1) H. E. Salzer, *Formulas for Complex Cartesian Interpolation of Higher Degree*, ibid. 28 (1949–50), 200–203. 附錄 II をみよ.

となり

$$u+iv=\frac{\Sigma a_k f_k}{\Sigma a_k}=\frac{f_0+f_1+f_i+f_{1+i}}{4}$$

$$=-1.170908-1.255797i$$

となる．表値は $-1.170898-1.255775i$ となっていて補間値は十分精密な値を與えている．

次に5點補間法を用いると

(34.9)

```
°i   °1+i
°0   °1   °2
```

$$\begin{cases} A_0=\frac{1}{4}(-1-i), \quad A_1=\frac{1}{2}(-1+i), \quad A_2=\frac{1}{20}(1+3i), \\ A_i=\frac{1}{10}(-3+i), \; A_{1+i}=\frac{1}{2}i \end{cases}$$

で

$$a_0=-\frac{1}{2}, \quad a_1=-1, \quad a_2=-\frac{1}{10}i, \quad a_i=\frac{1}{5}(-2-i),$$

$$a_{1+i}=\frac{1}{2}(-1-i), \quad \Sigma a_k=\frac{1}{5}(-12-4i)$$

となる．上の函數表になお $f_2=-0.951262-0.792198i$ をつけ加えて計算すると

$$u+iv=-1.170902-1.255773i$$

となり上に得た値に匹敵する．

**例2.** 例1と同じ場所でやはり $h=0.2$ として $x=0.4$, $y=1.3$ にたいする値を補間によってだし表値と比較してみよう．$P=1+\frac{1}{2}i$ である．

まず4點法を試みる．(34.8)の數値をもとにして，$a_0=0.6+0.2i$, $a_1=1+i$, $a_i=0.6-0.2i$, $a_{1+i}=1-i$ を用いると

$$u+iv=-1.146744-1.086570i$$

となる．表値は $-1.146733-1.086542i$ である．

これにたいし (34.8) の4點の右に2點を追加して6點法

(34.10)

```
°i   °1+i   °2+i
°0   °1     °2
```

$$\begin{cases} A_0=\frac{1}{20}(3+i), \quad A_1=\frac{1}{2}i, \quad A_2=\frac{1}{20}(-3+i), \\ A_i=\frac{1}{20}(3-i), \quad A_{1+i}=-\frac{1}{2}i, \quad A_{2+i}=\frac{1}{20}(-3-i) \end{cases}$$

を用いれば一層精度がよくなることが期待される．實際

$-1.376584-1.402788i$,　$-1.311591-1.058869i$,　$-1.248884-0.744798i$

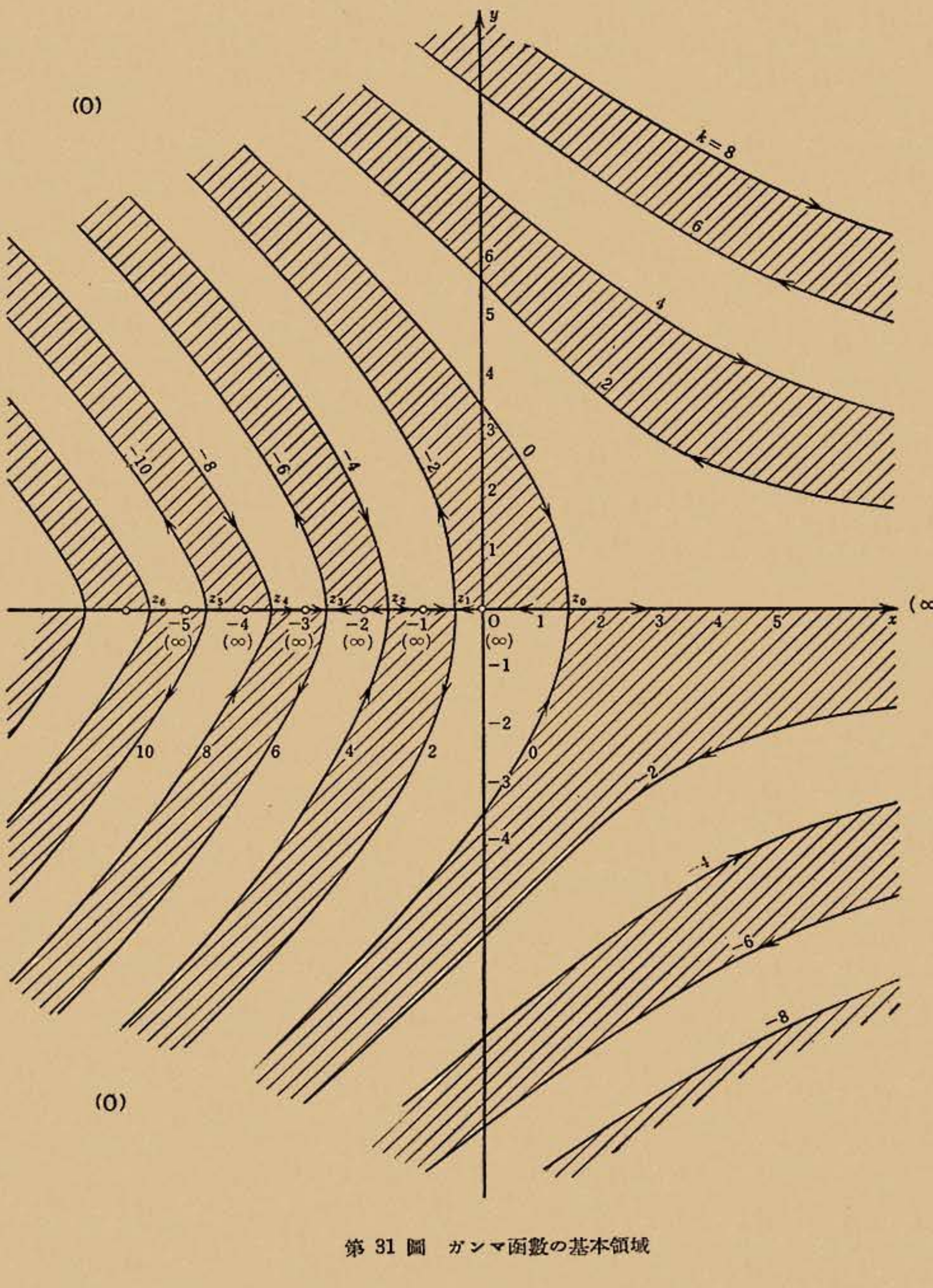
$-1.014254-1.455487i$,　$-0.981202-1.106045i$,　$-0.951262-0.792198i$

1) このような平均になることは正則函數の性質として豫期されたことである．

をもとにして，$a_0=a_{2+i}=0.14-0.02i$，$a_1=a_{1+i}=1$，$a_2=a_i=0.14+0.02i$ を用いると，

$$u+iv=-1.146733-1.086542i$$

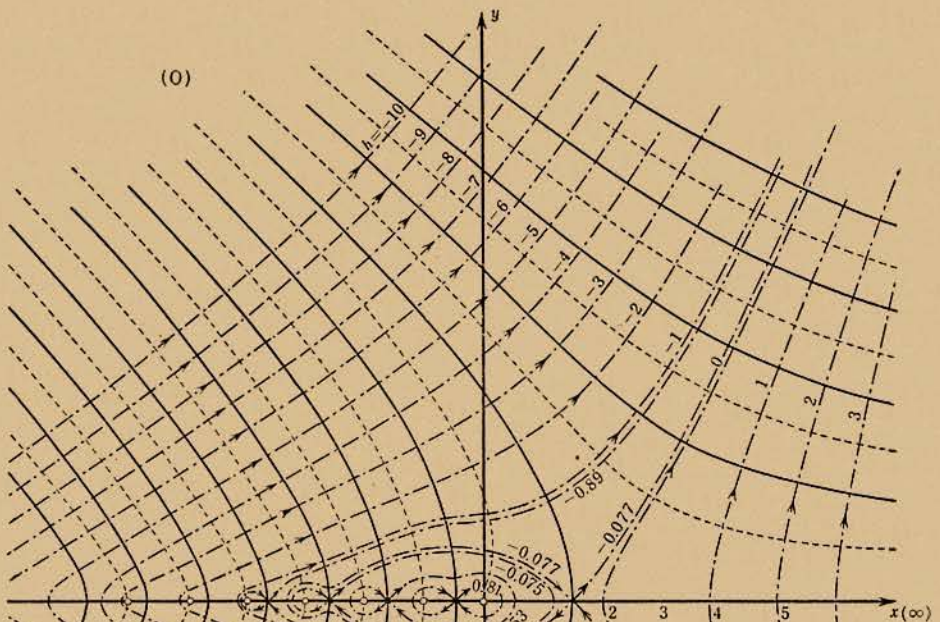
となって表値に一致する．




第 31 圖　ガンマ函數の基本領域

## § 35.　ガンマ函數による等角寫像

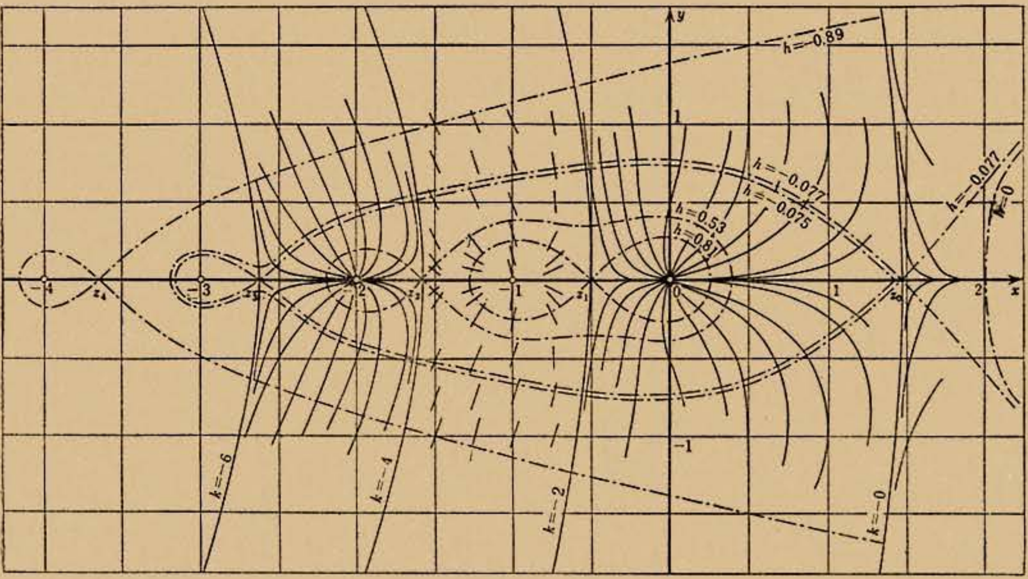
ガンマ函數　$w=\Gamma(z)$　は無限遠點を眞性特異點にもつ全有限　$z$　平面で有理型な函數であるから　$z$　平面は無限個の基本領域に分割されるわけであるが，上に計算した數表をもとに第 31 圖のようにな



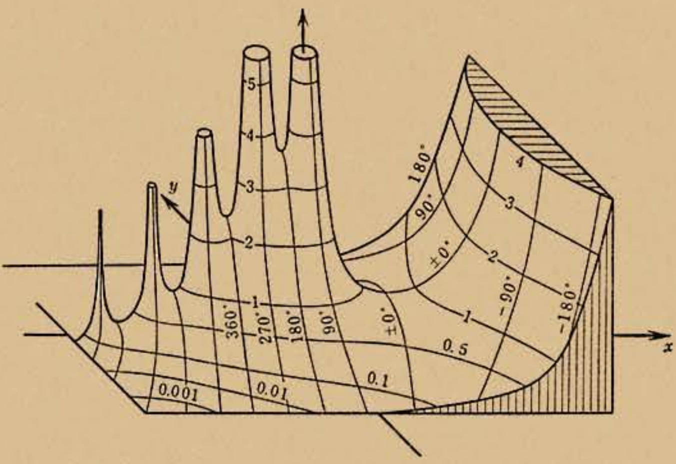

第 32 圖　ガンマ函數による等角寫像

ることを示そう．ガンマ函數による等角寫像（第 32 圖）は 1928 年まず J. Lense によって性質的に研究され次いで 1931 年 I. Ginzel によってさらに詳細な點が明らかにせられた.[1]

まずガンマ函數と逆ガンマ函數の特異點について知らねばならない．




第 33 圖　破線は等高線 $u=h\frac{\pi}{2}$, 實線は流線 $v=k\frac{\pi}{2}$




第 34 圖　ガンマ函數の浮だし

§32 により微係數 $\Gamma'(z)$ は實なる點 $z=z_0, z_1, z_2, \cdots\cdots$ に 1 位の零點をもつからこれらの點は $\Gamma(z)$ の 1 次の交叉點であり，對應する $w$ 平面上のこれも實なる點 $w_0=\Gamma(z_0), w_1=\Gamma(z_1), w_2=\Gamma(z_2), \cdots\cdots$ は逆ガンマ函數の 1 次の代數分岐點である．

次に $\Gamma(z)$ は $z=0, -1, -2, \cdots\cdots$ に極をもつがすべて 1 位であるから等角寫像では別に特異點ではない．ただ流線はこれらの各點にむかってよじ登るべく集まり從って等高線はこれらに直交

1) J. Lense, S. B. math-nat. Kl. Bayr. Akad. Wiss. München, 1928, S. 267–283;
I. Ginzel, *Konforme Abbildung durch Gammafunktionen*, Acta. Math. **56** (1931), S. 273–353.

して高くなるほど直徑がちぢむわけである．第32圖に於て實線および點線は流線を，—·—·—·— 線は等高線を表わす．第33圖は實軸の近傍の一部をやや精しく與えたものである．第34圖はこれに基いて作った浮だしである．

次に逆ガンマ函數の超越特異點を調べるため無限遠に向う $\Gamma(z)$ の漸近路について考える．それには Binet の公式

$$\ln \Gamma(z)=\frac{1}{2}\ln 2\pi+\left(z-\frac{1}{2}\right)\ln z-z+\mu(z),$$

$$\lim_{z\to\infty}\mu(z)=0, \qquad (|\arc z|<\pi)$$

をもとにする．$z=x+iy=re^{i\theta}$, $w=\Gamma(z)=e^{u+iv}=\rho e^{iv}$ とおけば，まず上式から

$$\ln|\Gamma(z)|=u=\frac{1}{2}\ln 2\pi+\left(x-\frac{1}{2}\right)\ln r-y\theta-x+\Re\mu(z)$$

$$=x\left[\left(1-\frac{1}{2x}\right)\ln r-\frac{y}{x}\theta-1\right]+\Re\mu(z)+\frac{1}{2}\ln 2\pi$$

がでるから

$$|\theta|<\frac{\pi}{2} \quad のとき \quad \lim_{z\to\infty}\Gamma(z)=\infty$$

がわかる．よって右半平面の虚軸を除いた角領域内で無限遠に行く路はすべて漸近路で $\infty$ が漸近値である．次に

$$\ln|\Gamma(z)|=u=\frac{1}{2}(\ln 2\pi-\ln r)+x(\ln r-1)-y\theta+\Re\mu(z)$$

とかけば，$x\leqq 0$, $y\theta>0$ のとき $z\to\infty$ ならば $\ln|\Gamma(z)|\to-\infty$ がわかるから，負實軸を含まない左上半平面および左下半平面内で無限遠に行く路はすべて漸近路で漸近値はいずれも 0 である．これにたいして逐に負の實軸にいくらでも近づくような路はすべて振動路である．なんとなれば負實軸の上に $\Gamma(z)$ は極をもつが，一方に於て任意の正整數 $m$ と $-m-1<z<-m$ なる $z$ にたいして關係

$$\Gamma(z)=\frac{\Gamma(z+m+1)}{z(z+1)\cdots(z+m)}$$

が成立つから $m$ が大になれば二つの隣接極の間でいくらでも 0 に從って連續性のため任意の値に近づき得るからで，ここに眞性特異點の特性が現われている．

なお各流線

$$\arc\Gamma(z)=v=y\ln r+x\theta-\frac{1}{2}\theta-y+\Im\mathrm{m}\,\mu(z)=\text{const}$$

について $x\to-\infty$ にたいしては $|y|$ は上に有界であり，また $+\infty$ に走るものについては $x\to+\infty$ にたいし $|y|$ は下に有界であることがわかる．

$$\Re\Gamma(z)=e^u\cos v, \qquad \Im\mathrm{m}\,\Gamma(z)=e^u\sin v$$

であるから軌跡

$$v=k\frac{\pi}{2} \qquad (k=0,\pm1,\pm2,\cdots\cdot)$$

は $k$=偶數のものは $w$ 平面の實軸の像（第 31 および 32 圖の實線），$k$=奇數のものは $w$ 平面の虚軸の像（第 32 圖の點線）を表わすわけで，第 31 圖の矢印は $w$ 平面上で實軸を正の向きに動くとき像點が動く向きを表わしている．また等高線を

$$u=h\frac{\pi}{2}, \qquad 從って \qquad |\Gamma(z)|=e^{h\frac{\pi}{2}}$$

としたとき第 32 圖には $h=0,\pm1,\pm2,\cdots\cdot$ のものが示してある．矢印は $w$ 平面上で $w=0$ を中心とする對應する圓の上を正の向きにめぐるとき像點が動く向きを表わしている．なお特に交叉點 $z_0,z_1,z_2,z_3,z_4$ を過る等高線が描いてある．

以上から逆ガンマ函數 $z=\Gamma^{-1}(w)$ は $w=0$ の上に二つ，$w=\infty$ の上に一つの超越特異點をもち，しかもこれらは對數分岐點であることがわかる．特異點がすべて $w$ 平面の實軸の上にあることから $w$ 平面を實軸に沿うて上下半平面に切斷しこれに對應する $z$ 平面上の領域を求めて基本領域に分割すると第 31 圖が得られる．

次に等高線 $u(x,y)=h\frac{\pi}{2}$ $(h=0,\pm1,\pm2,\cdots\cdot)$ および流線 $v(x,y)=k\frac{\pi}{2}$ $(k=0,\pm1,\pm2,\cdots\cdot)$ の上の點の各 $x$ にたいする $y$ を與える表を掲げておこう．

等 高 線

| $h$ \ $x$ | −9 | −8 | −7 | −6 | −5 | −4 | −3 | −2 | −1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| −10 | 1.550 | 2.308 | 3.072 | 3.831 | 4.620 | 5.454 | 6.361 | 7.376 | 8.533 | 9.857 | | | | | | | | | |
| −9 | 1.028 | 1.767 | 2.502 | 3.237 | 3.987 | 4.769 | 5.613 | 6.557 | 7.638 | 8.890 | | | | | | | | | |
| −8 | 0.527 | 1.238 | 1.951 | 2.659 | 3.372 | 4.105 | 4.886 | 5.754 | 6.754 | 7.926 | 9.301 | | | | | | | | |
| −7 | 0.158 | 0.723 | 1.414 | 2.096 | 2.775 | 3.462 | 4.182 | 4.972 | 5.884 | 6.967 | 8.257 | 9.764 | | | | | | | |
| −6 | | 0.274 | 0.889 | 1.549 | 2.197 | 2.842 | 3.502 | 4.214 | 5.030 | 6.014 | 7.214 | 8.650 | | | | | | | |
| −5 | | | 0.401 | 1.016 | 1.637 | 2.244 | 2.850 | 3.483 | 4.198 | 5.068 | 6.164 | 7.517 | 9.122 | | | | | | |
| −4 | | | | 0.510 | 1 096 | 1.670 | 2.226 | 2.784 | 3.392 | 4.133 | 5.104 | 6.359 | 7.899 | | | | | | |
| −3 | | | | 0.151 | 0.579 | 1.117 | 1.631 | 2.122 | 2.622 | 3.213 | 4.029 | 5.165 | 6.636 | 8.383 | | | | | |
| −2 | | | | | 0.184 | 0.594 | 1.066 | 1.498 | 1.896 | 2.317 | 2.927 | 3.906 | 5.290 | 7.008 | | | | | |
| −1 | | | | | | 0.190 | 0.539 | 0.917 | 1.320 | 1.464 | 1.766 | 2.511 | 3.814 | 5.525 | 7.518 | | | | |
| 0 | | | | | | | | | | | | | 1.952 | 3.825 | 5.912 | 8.175 | | | |
| 1 | | | | | | | | | | | | | | 1.260 | 4.020 | 6.476 | | | |
| 2 | | | | | | | | | | | | | | | 0.575 | 4.460 | 7.225 | | |
| 3 | | | | | | | | | | | | | | | | 0.912 | 5.153 | | |
| 4 | | | | | | | | | | | | | | | | | 1.978 | 6.075 | |
| 5 | | | | | | | | | | | | | | | | | | 3.222 | 7.188 |
| 6 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | 4.581 |

流　　線

| k \ x | −9 | −8 | −7 | −6 | −5 | −4 | −3 | −2 | −1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| −10 | 6.10 | 4.98 | 3.80 | 2.50 | 0.92 | | | | | | | | | | | | | | |
| −9 | 6.75 | 5.67 | 4.55 | 3.29 | 1.81 | 0.00 | | | | | | | | | | | | | |
| −8 | | 6.33 | 5.22 | 4.03 | 2.70 | 1.04 | | | | | | | | | | | | | |
| −7 | | 7.03 | 5.96 | 4.85 | 3.53 | 2.03 | 0.00 | | | | | | | | | | | | |
| −6 | | | 6.64 | 5.59 | 4.36 | 2.98 | 1.21 | | | | | | | | | | | | |
| −5 | | | 7.32 | 6.30 | 5.18 | 3.87 | 2.35 | 0.00 | | | | | | | | | | | |
| −4 | | | | 6.97 | 5.95 | 4.78 | 3.40 | 1.59 | | | | | | | | | | | |
| −3 | | | | 7.63 | 6.67 | 5.57 | 4.35 | 2.90 | 0.00 | | | | | | | | | | |
| −2 | | | | | 7.36 | 6.36 | 5.20 | 3.98 | 2.34 | | | | | | | | | | |
| −1 | | | | | 8.05 | 7.11 | 6.11 | 4.90 | 3.62 | 1.75 | | | | | | | | | |
| 0 | | | | | | 7.82 | 6.88 | 5.82 | 4.71 | 3.44 | 1.806 | | | | | | | | |
| 1 | | | | | | 8.53 | 7.60 | 6.65 | 5.64 | 4.54 | 3.440 | 2.345 | 1.599 | 1.231 | 1.037 | 0.918 | 0.838 | 0.779 | 0.733 |
| 2 | | | | | | | 8.31 | 7.40 | 6.47 | 5.55 | 4.570 | 3.650 | 2.894 | 2.375 | 2.042 | 1.823 | 1.668 | 1.553 | 1.464 |
| 3 | | | | | | | 9.04 | 8.17 | 7.29 | 6.39 | 5.539 | 4.706 | 3.980 | 3.412 | 2.999 | 2.703 | 2.485 | 2.320 | 2.190 |
| 4 | | | | | | | | 8.85 | 8.04 | 7.22 | 6.416 | 5.640 | 4.944 | 4.362 | 3.904 | 3.554 | 3.286 | 3.077 | 2.910 |
| 5 | | | | | | | | 9.61 | 8.77 | 8.01 | 7.234 | 6.498 | 5.826 | 5.243 | 4.761 | 4.374 | 4.067 | 3.821 | 3.621 |
| 6 | | | | | | | | | 9.50 | 8.73 | 8.007 | 7.302 | 6.651 | 6.073 | 5.577 | 5.166 | 4.828 | 4.551 | 4.322 |
| 7 | | | | | | | | | | | 8.746 | 8.066 | 7.433 | 6.860 | 6.358 | 5.930 | 5.569 | 5.267 | 5.013 |
| 8 | | | | | | | | | | | 9.457 | 8.798 | 8.180 | 7.614 | 7.109 | 6.669 | 6.291 | 5.969 | 5.694 |
| 9 | | | | | | | | | | | 10.145 | 9.503 | 8.898 | 8.340 | 7.835 | 7.387 | 6.996 | 6.657 | 6.364 |
| 10 | | | | | | | | | | | | 10.186 | 9.594 | 9.042 | 8.538 | 8.085 | 7.684 | 7.332 | 7.024 |

# 第4章　ガンマ函數の應用

## §36.　ガンマ函數で表わされる積分

まず公式

$$\int_0^\infty t^{x-1}e^{-\alpha t}dt=\frac{\Gamma(x)}{\alpha^x}, \qquad (\Re x>0,\ \Re\alpha>0) \tag{36.1}$$

を證明しよう．$\alpha$ は複素パラメータであるから單なる變數變換は用をなさない．適當な複素積分に Cauchy の積分定理を用いるのである．

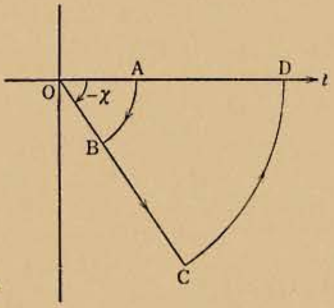
假定により

$$\alpha=|\alpha|e^{i\chi}, \qquad |\chi|<\frac{\pi}{2}$$

として圖の如き路 $ABCDA$ に沿うての積分

$$\int_C z^{x-1}e^{-\alpha z}dz=0 \tag{36.2}$$

を考える．圓弧 $AB, CD$ の半徑をそれぞれ $\rho, R$ とし $\rho\to 0,\ R\to\infty$ ならしめる．



第　35　圖

(36.2) の積分を

$$\int_{AB}+\int_{BC}+\int_{CD}+\int_{DA}=0$$

のようにわけると

$$\int_{AB}=i\rho^x\int_0^{-\chi}e^{ix\theta}e^{-\alpha\rho e^{i\theta}}d\theta\to 0 \quad (\rho\to 0),$$

$$\int_{BC}=e^{-ix\chi}\int_\rho^R r^{x-1}e^{-|\alpha|r}dr\to\frac{1}{|\alpha|^x e^{ix\chi}}\int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt=\frac{\Gamma(x)}{\alpha^x},$$

$$\int_{CD}=iR^x\int_{-\chi}^0 e^{ix\theta}e^{-|\alpha|Re^{i(\theta+\chi)}}d\theta\to 0 \quad (R\to+\infty)$$

であるから

$$\int_{DA}=\int_R^\rho t^{x-1}e^{-\alpha t}dt\to-\int_0^\infty t^{x-1}e^{-\alpha t}dt$$

で (36.1) が從う．

(36.1) に於て先ず $x$ を實數と假定し $\alpha=\lambda+i\mu=\sqrt{\lambda^2+\mu^2}\,e^{i\omega},\ \lambda>0,\ \omega=\tan^{-1}\mu/\lambda$ とおいて實部虚部に分解することによりただちに

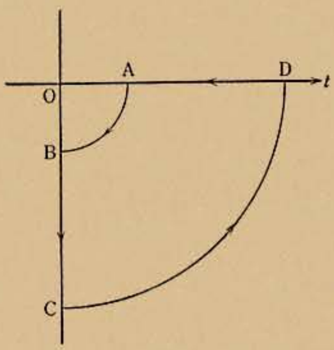
$$
(36.3)\qquad \begin{cases} \displaystyle\int_0^\infty t^{x-1}e^{-\lambda t}\cos\mu t\,dt=\frac{\Gamma(x)\cos(\omega x)}{(\lambda^2+\mu^2)^{x/2}}, \\ \displaystyle\int_0^\infty t^{x-1}e^{-\lambda t}\sin\mu t\,dt=\frac{\Gamma(x)\sin(\omega x)}{(\lambda^2+\mu^2)^{x/2}} \end{cases} \qquad (\Re x>0)
$$

を得るが，$\lambda=0$ のときの公式

$$
(36.4)\qquad \begin{cases} \displaystyle\int_0^\infty t^{x-1}\cos\mu t\,dt=\frac{\Gamma(x)\cos\frac{\pi x}{2}}{\mu^x}, \\ \displaystyle\int_0^\infty t^{x-1}\sin\mu t\,dt=\frac{\Gamma(x)\sin\frac{\pi x}{2}}{\mu^x} \end{cases} \qquad (0<\Re x<1,\ \mu>0)
$$

の證明は改めて厳格にやらねばならない．今度は圖の如き路 $ABCDA$ に沿うての積分

$$
\int_C z^{x-1}e^{-i\mu z}dz=0
$$



第 36 圖

を考える．

まず $\Re x>0$ の假定の下に前と同様に $\int_{AB}\to 0\ (\rho\to 0)$ がいえる．さらに $\mu>0$ の假定のもとに

$$
\int_{BC}\to\frac{\Gamma(x)}{\mu^x}e^{-i\frac{\pi}{2}x}
$$

が従う．次に

$$
\int_{CD}=R^x i\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}e^{-i\mu Re^{i\theta}}e^{ix\theta}d\theta
$$

より

$$
\left|\int_{CD}\right|\leqq|R^x|\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{-\mu R\sin\theta}d\theta
$$

が導かれるが，$0\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{2}$ に於て $\sin\theta\geqq\frac{2}{\pi}\theta$ なることを用いて

$$
\left|\int_{CD}\right|\leqq|R^x|\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{-\mu R\frac{2}{\pi}\theta}d\theta\leqq\frac{\pi}{2\mu}|R^{x-1}|
$$

が従う．よって $\Re x<1$ の假定のもとに $\int_{CD}\to 0\ (R\to+\infty)$ となる．最後に

$$
\int_{DA}\to-\int_0^\infty t^{x-1}e^{-i\mu t}dt
$$

であるから，前同様に實虚部に分解して (36.4) が従うのである．

讀者は以下の順に各公式を導かれたい．

問 1.
$$\int_{-\infty}^{\infty}(it)^{x-1}e^{i\mu t}dt\begin{cases}=\dfrac{2\Gamma(x)\sin\pi x}{\mu^x}, & \mu>0\\ =0, & \mu<0\end{cases}\qquad (0<\Re x<1)$$

問 2.
$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{i\mu t}}{(a+it)^x}dt\begin{cases}=\dfrac{2\pi\mu^{x-1}e^{-a\mu}}{\Gamma(x)}, & \mu>0\\ =0, & \mu<0\end{cases}\qquad (\Re x>0)$$

問 3.
$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dt}{(a+it)^x(b-it)^y}=\frac{2\pi}{(a+b)^{x+y-1}}\cdot\frac{\Gamma(x+y-1)}{\Gamma(x)\Gamma(y)},$$
$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dt}{(a+it)^x(b+it)^y}=0,$$
$$(a,b>0,\ \Re(x+y)>1).$$

問 4.
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{x-1}t\cos yt\,dt=\frac{\pi}{2^x}\cdot\frac{\Gamma(x)}{\Gamma\left(\dfrac{x+y+1}{2}\right)\Gamma\left(\dfrac{x-y+1}{2}\right)},\quad \Re x>0.$$
$$\int_0^{\pi}\sin^{x-1}t\cdot e^{iyt}dt=\frac{\pi}{2^{x-1}}e^{\frac{i\pi y}{2}}\frac{\Gamma(x)}{\Gamma\left(\dfrac{x+y+1}{2}\right)\Gamma\left(\dfrac{x-y+1}{2}\right)},\quad \Re x>0.$$

## §37.　或る種の無限積の計算

$u_n$ が $n$ の有理函數なるときの無限積 $\prod_{n=1}^{\infty}u_n$ のあるものはガンマ函數によって求めることができる. $u_n$ を因數に分解すれば無限積は

(37.1)
$$\prod_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{A_n(n-a_1)(n-a_2)\cdots\cdots(n-a_k)}{(n-b_1)\cdots\cdots(n-b_l)}\right\}$$

の形に書けるがいま分母の因數はどれも 0 にならぬと假定する. (37.1) が收斂するためには明らかに分子の因數の數は分母の因數の數に等しく且つ $A_n=1$ でなければならない. よって $k=l$ として積

(37.2)
$$P=\prod_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{(n-a_1)\cdots\cdots(n-a_k)}{(n-b_1)\cdots\cdots(n-b_k)}\right\}$$

を考える. この積の一般項を

$$\left(1-\frac{a_1}{n}\right)\cdots\cdots\left(1-\frac{a_k}{n}\right)\left(1-\frac{b_1}{n}\right)^{-1}\cdots\cdots\left(1-\frac{b_k}{n}\right)^{-1}$$
$$=1-\frac{a_1+a_2+\cdots\cdots+a_k-b_1-\cdots\cdots-b_k}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

と書いてみれば無限積 $P$ が絕對收斂するためには關係

(37.3)
$$a_1+\cdots\cdots+a_k-b_1-\cdots\cdots-b_k=0$$

が滿たされることが必要且十分であることがわかる. よって因數 $\exp(a_1+\cdots\cdots+a_k-b_1-\cdots\cdots-b_k)/n$ を一般項に導入して $P$ を次のように書くことができる:

$$(37.4)\qquad P=\prod_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{\left(1-\frac{a_1}{n}\right)e^{\frac{a_1}{n}}\left(1-\frac{a_2}{n}\right)e^{\frac{a_2}{n}}\cdots\left(1-\frac{a_k}{n}\right)e^{\frac{a_k}{n}}}{\left(1-\frac{b_1}{n}\right)e^{\frac{b_1}{n}}\left(1-\frac{b_2}{n}\right)e^{\frac{b_2}{n}}\cdots\left(1-\frac{b_k}{n}\right)e^{\frac{b_k}{n}}}\right\}.$$

ところで (22.6) から

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{n}\right)e^{\frac{z}{n}}=\frac{1}{-z\Gamma(-z)e^{-Cz}}$$

が從うから

$$P=\frac{b_1\Gamma(-b_1)b_2\Gamma(-b_2)\cdots b_k\Gamma(-b_k)}{a_1\Gamma(-a_1)a_2\Gamma(-a_2)\cdots a_k\Gamma(-a_k)}$$

$$(37.5)\qquad =\prod_{i=1}^{k}\frac{\Gamma(1-b_i)}{\Gamma(1-a_i)}.$$

これが求むる式である.

**注意**　或は (37.2) の $P$ の部分積

$$P_n=\prod_{m=1}^{n}\left\{\frac{(m-a_1)\cdots(m-a_k)}{(m-b_1)\cdots(m-b_k)}\right\}$$

を (20.12) の定義を用いて書きなおせば

$$P_n=\prod_{i=1}^{k}\frac{b_i\Gamma_n(-b_i)}{a_i\Gamma_n(-a_i)}n^{b_1+\cdots\cdots+b_k-a_1-\cdots\cdots-a_k}$$

となることから (37.3) の條件および (37.5) の表示がただちに得られる.

## §38. $\Re(\gamma-\alpha-\beta)>0$ のときの $F(\alpha,\beta;\gamma;1)$ の値

超幾何級數

$$(38.1)\qquad F(\alpha,\beta;\gamma;z)=1+\frac{\alpha\beta}{1\cdot\gamma}z+\frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1\cdot2\cdot\gamma(\gamma+1)}z^2+\cdots\cdot$$

は $|z|<1$ にたいしてはつねに收斂し $|z|=1$ にたいしては $\Re(\gamma-\alpha-\beta)>0$ なるとき絕對收斂なることが證明される. そこで $\Re(\gamma-\alpha-\beta)>0$ のとき成立つ有用な關係

$$(38.2)\qquad F(\alpha,\beta;\gamma;1)=\frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma-\alpha-\beta)}{\Gamma(\gamma-\alpha)\Gamma(\gamma-\beta)}$$

を證明しよう. この關係は Gauss によって與えられた.

級數 (38.1) の收斂については次のようにして簡單に判別される. 即ちこの一般項を $u_n$ とすれば

$$(38.3)\qquad u_{n+1}=\frac{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n)\beta(\beta+1)\cdots(\beta+n)}{1\cdot2\cdots(n+1)\cdot\gamma(\gamma+1)\cdots(\gamma+n)}=\frac{n}{n+1}\cdot\frac{\Gamma_n(\gamma)}{\Gamma_n(\alpha)\Gamma_n(\beta)}\cdot\frac{1}{n^{1+\gamma-\alpha-\beta}}$$

と書かれることから級數 $\sum\frac{1}{n^x}$ と比べて $\Re(\gamma-\alpha-\beta)>0$ のときの收斂がただちに從うわけである.

いま $0\leqq x<1$ にたいする恒等式

$$(38.4)\qquad \gamma\{\gamma-1-(2\gamma-\alpha-\beta-1)x\}F(\alpha,\beta;\gamma;x)+(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)xF(\alpha,\beta;\gamma+1;x)$$

$$=\gamma(\gamma-1)(1-x)F(\alpha,\beta;\gamma-1;x)$$

$$\equiv\gamma(\gamma-1)\{1+\sum_{n=1}^{\infty}(v_n-v_{n-1})x^n\}$$

を考える．ここに $v_n$ は $F(\alpha,\beta;\gamma-1;x)$ に於ける $x^n$ の係數である．この關係に於て暫く $\Re(\gamma-\alpha-\beta)>1$ として $x\to1$ ならしめてみる．級數 $F(\alpha,\beta;\gamma-1;1)$ の收斂のため $v_n\to0$，從って級數 $1+\sum_{n=1}^{\infty}(v_n-v_{n-1})$ は 0 に收斂するから Abel の定理により上の關係の右邊は $x\to1$ のとき 0 に近迫する．一方左邊はやはり Abel の定理により

$$\gamma(\alpha+\beta-\gamma)F(\alpha,\beta;\gamma;1)+(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)F(\alpha,\beta;\gamma+1;1)$$

に近迫するから

$$F(\alpha,\beta;\gamma;1)=\frac{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)}{\gamma(\gamma-\alpha-\beta)}F(\alpha,\beta;\gamma+1;1) \tag{38.5}$$

が成立つことがわかる．但し上に $\Re(\gamma-\alpha-\beta)>1$ を假定したのであるが，この左右兩邊は $\Re(\gamma-\alpha-\beta)>0$ にたいし $\alpha,\beta,\gamma$ の解析函數であるからこの關係は $\Re(\gamma-\alpha-\beta)>0$ にたいし成立つ．

そこでこの操作を繰り返すと

$$F(\alpha,\beta;\gamma;1)=\left\{\prod_{m=0}^{n-1}\frac{(\gamma-\alpha+m)(\gamma-\beta+m)}{(\gamma+m)(\gamma-\alpha-\beta+m)}\right\}F(\alpha,\beta;\gamma+n;1)$$

$$=\left\{\lim_{n\to\infty}\prod_{m=0}^{n-1}\frac{(\gamma-\alpha+m)(\gamma-\beta+m)}{(\gamma+m)(\gamma-\alpha-\beta+m)}\right\}\lim_{n\to\infty}F(\alpha,\beta;\gamma+n;1).$$

この二つの極限は何れも存在する．最初の方は $\dfrac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma-\alpha-\beta)}{\Gamma(\gamma-\alpha)\Gamma(\gamma-\beta)}$ である．第二の方は

$$\lim_{n\to\infty}F(\alpha,\beta;\gamma+n;1)=1$$

である．なんとなれば $u_n(\alpha,\beta,\gamma)$ を $F(\alpha,\beta;\gamma;x)$ に於ける $x^n$ の係數とし，$n>|\gamma|$ とすれば

$$|F(\alpha,\beta;\gamma+n;\ 1)-1|\leqq\sum_{m=1}^{\infty}|u_m(\alpha,\beta,\gamma+n)|$$

$$\leqq\sum_{m=1}^{\infty}u_m(|\alpha|,|\beta|,n-|\gamma|)$$

$$<\frac{|\alpha\beta|}{n-|\gamma|}\sum_{m=0}^{\infty}u_m(|\alpha|+1,|\beta|+1,n+1-|\gamma|)$$

が成立つが，これに於て最後の級數は $n>|\gamma|+|\alpha|+|\beta|+1$ のとき收斂で且つ $n$ の正なる減少函數であるからである．これで (38.2) が證明された．

## §39. 第一種の Euler 積分またはベータ函數

積分

$$\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt \tag{39.1}$$

を**第一種の Euler 積分**という．これは領域 $D:\Re x>0,\ \Re y>0$ に於て廣義一様收斂するから $D$ に於て $(x,y)$ の連續函數を定義する．さらに Weierstrass の定理により $x,y$ のおのおのについて正則であることが示されるから Hartogs の定理により二變數 $(x,y)$ の解析函數を表わす．これを $B(x,y)$ と書き**ベータ函數**とよぶ．次にまず $\Re x>0,\ \Re y>0$ の假定の下にガンマ函數と

$$B(x,y)=\frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} \tag{39.2}$$

の關係にあることを示し，從ってこの關係によって $x,y$ のすべての値にたいする $B(x,y)$ の定義とすることができることを示そう．

まず變數變換 $t=1-t'$ によって

$$B(x,y)=B(y,x) \tag{39.3}$$

の關係がすぐ確められる．いま恒等式

$$\frac{d}{dt}[t^x(1-t)^y]=xt^{x-1}(1-t)^{y-1}-(x+y)t^x(1-t)^{y-1}$$

を 0 から 1 まで邊々積分すれば關係

$$xB(x,y)=(x+y)B(x+1,y)$$

が導かれる．この兩邊に $\Gamma(x+y)/\Gamma(x)\Gamma(y)$ をかけると

$$\frac{\Gamma(x+y)}{\Gamma(x)\Gamma(y)}B(x,y)=\frac{\Gamma(x+y+1)}{\Gamma(x+1)\Gamma(y)}B(x+1,y) \tag{39.4}$$

が從うが，この關係は左邊の式が $x$ について 1 なる週期をもつ解析函數であることを示す．しかし (39.3) の對稱性があるからこの式は $y$ についても 1 なる週期をもつわけで，從っていま $x,y$ についてそれぞれ 1 なる週期をもつこの解析函數を $E(x,y)$ と表わせば

$$\frac{\Gamma(x+y)}{\Gamma(x)\Gamma(y)}B(x,y)=E(x,y) \tag{39.5}$$

である．これを

$$\frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}E(x,y)=B(x,y) \tag{39.6}$$

の形に書き，この兩邊に $n^x$ をかけ，なお $y$ の代わりに $y+n$ と書けば

$$\frac{\Gamma(y+n)n^x}{\Gamma(x+y+n)}\Gamma(x)E(x,y)=n^xB(x,y+n) \tag{39.7}$$

となる．この左邊の最初の因數を

$$\frac{\Gamma(y+n)}{\Gamma(n)n^y}:\frac{\Gamma(x+y+n)}{\Gamma(n)n^{x+y}}$$

の形に書いて $n\to\infty$ にやれば 1 に近づくことがわかるから

(39.8) $$\Gamma(x)E(x,y)=\lim_{n\to\infty}[n^x B(x,y+n)]$$

が成立つ．ところで $B(x,y+n)$ の積分表示に於て變數變換

$$t=\frac{\tau}{\nu+\tau},\qquad 1-t=\frac{\nu}{\nu+\tau},\qquad dt=\frac{\nu}{(\nu+\tau)^2}d\tau\qquad (\nu>0)$$

を行えば

(39.9) $$n^x B(x,y+n)=\left(\frac{n}{\nu}\right)^x\int_0^\infty\left(1+\frac{\tau}{\nu}\right)^{-(x+y+n)}\tau^{x-1}d\tau$$

となるが，暫く $x,y$ を正數として

$$\nu=x+y+n$$

とすれば $n\to\infty$ とともに $\frac{n}{\nu}\to 1$ であるから結局

(39.10) $$\Gamma(x)E(x,y)=\lim_{\nu\to\infty}\int_0^\infty\left(1+\frac{\tau}{\nu}\right)^{-\nu}\tau^{x-1}d\tau$$

が成立つ．この右邊は $y$ に無關係だから $E(x,y)$ は $y$ に關せず從って (39.3) の對稱性のため $x$ にも關しないわけで，結局 $E(x,y)$ は const でなければならない．よって (39.10) に於て例えば $x=1$ として

$$E=\lim_{\nu\to\infty}\int_0^\infty\left(1+\frac{\tau}{\nu}\right)^{-\nu}d\tau=\lim_{\nu\to\infty}\frac{\nu}{\nu-1}=1$$

がわかる．かくしてまず $x>0,\ y>0$ にたいし關係 (39.2) が示されたわけであるが，この兩邊は $x,y$ の解析函數であるから領域 $D:\Re x>0,\ \Re y>0$ に於て成立つことが從う．

次に二三の有用な積分を誘導しよう．

次の積分に於て $t=\sqrt{\tau}$ とおくことにより

(39.11) $$\int_0^1 t^{2x-1}(1-t^2)^{y-1}dt=\frac{1}{2}\frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)},\quad (\Re x>0,\ \Re y>0).$$

これに於て $t=\sin\theta$ とおけば

(39.12) $$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2x-1}\theta\cos^{2y-1}\theta d\theta=\frac{1}{2}\frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)},\quad (\Re x>0,\ \Re y>0).$$

次の積分に於て $t=\tan^2\theta$ とおき上式を用いれば

(39.13) $$\int_0^\infty\frac{t^{x-1}}{(1+t)^{x+y}}dt=\frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)},\quad (\Re x>0,\ \Re y>0).$$

これに於て $t=\tau^2$ とおけば

(39.14) $$\int_0^\infty\frac{t^{2x-1}}{(1+t^2)^{x+y}}dt=\frac{1}{2}\frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)},\quad (\Re x>0,\ \Re y>0).$$

(39.13) を $\int_0^\infty=\int_0^1+\int_1^\infty$ とわけこの右邊の第二の積分に於て $t=1/\tau$ と變換することにより

$$(39.15)\qquad \int_0^1 \frac{t^{x-1}+t^{y-1}}{(1+t)^{x+y}}dt=\frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)},\quad (\Re x>0,\ \Re y>0).$$

**問 1.** 次式を證明せよ．

$$B(x,y)B(x+y,z)=B(y,z)B(y+z,x),$$

$n,m=1,2,3,\cdots$ にたいし

$$\frac{1}{B(n,m)}=m\binom{n+m-1}{n-1}=n\binom{n+m-1}{m-1}.$$

**問 2.** (39.1), (38.13), (39.15) よりガンマ函数の相補定理を用いて次式を示せ．

$$\frac{\pi}{\sin\pi x}\begin{cases}=\displaystyle\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{-x}dt,\\[2mm] =\displaystyle\int_0^\infty \frac{t^{x-1}}{1+t}dt, & (0<\Re x<1).\\[2mm] =\displaystyle\int_0^1 \frac{t^{x-1}+t^{-x}}{1+t}dt,\end{cases}$$

**問 3.** $\Re x>0$, $\Re y>0$, $\Re a>0$ のとき次式を導け．

$$\int_0^1 t^{x-1}(1-t^a)^{\frac{y}{a}-1}dt=\frac{\Gamma\left(\frac{x}{a}\right)\Gamma\left(\frac{y}{a}\right)}{a\cdot\Gamma\left(\frac{x+y}{a}\right)}=\frac{1}{a}\cdot B\left(\frac{x}{a},\frac{y}{a}\right).$$

**問 4.**

$$J(\alpha,\beta)\equiv\int_0^1\frac{t^{\alpha-1}}{\sqrt{1-t^\beta}}dt=\frac{2^{\frac{2\alpha}{\beta}-1}\cdot\left(\Gamma\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)\right)^2}{\beta\cdot\Gamma\left(\frac{2\alpha}{\beta}\right)}$$

を導け．よって $\Gamma\left(\frac{p}{8}\right)$, $\Gamma\left(\frac{q}{12}\right)$ (但し $p,q$ は自然数) が $J(1,3)$, $J(1,4)$, $J(1,8)$, $J(1,12)$ に歸せられることを示せ．Legendre はこれらの積分を完全楕圓積分になおすことを研究した．

**問 5.**

$$\int_{-1}^1\frac{(1+t)^{2x-1}(1-t)^{2y-1}}{(1+t^2)^{x+y}}dt=2^{x+y-2}\frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)},\quad (\Re x>0,\ \Re y>0).$$

**問 6.**

$$\int_0^1(1-t^x)^{-1/y}dt=\frac{\Gamma\left(\frac{1+x}{x}\right)\Gamma\left(\frac{y-1}{y}\right)}{\Gamma\left(1+\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right)},\quad (x>0,\ y>1).$$

**問 7.**

$$\int_b^a(a-t)^{x-1}(t-b)^{y-1}dt=(a-b)^{x+y-1}\frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)},$$

$$(\Re x>0,\ \Re y>0,\ a>b>0).$$

$$\int_b^a\frac{(a-t)^{x-1}(t-b)^{y-1}}{|t-c|^{x+y}}dt=\frac{(a-b)^{x+y-1}}{|a-c|^y|b-c|^x}\cdot\frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)},$$

$(\Re x>0,\ \Re y>0,\ a>b>c>0$ 又は $c>a>b>0)$.

問 8.[1] $p$ を正整數，$\triangle(u)\equiv\text{discriminant}\prod_{i<j}(u_j-u_i)$ とすれば $\Re x>0$, $\Re y>0$, $\Re z>\mathrm{Max}\left(-\frac{1}{p}, -\frac{\Re x}{p-1}, -\frac{\Re y}{p-1}\right)$ なるとき

$$\int_0^1\cdots\int_0^1(u_1\cdots u_p)^{x-1}\{(1-u_1)\cdots(1-u_p)\}^{y-1}|\triangle(u)|^{2z}du_1\cdots du_p$$
$$=\prod_{\nu=1}^{p}\frac{\Gamma(1+\nu z)\Gamma\{x+(\nu-1)z\}\Gamma\{y+(\nu-1)z\}}{\Gamma(1+z)\Gamma\{x+y+(p+\nu-2)z\}}$$

が成立つ．また $z$ を負でない整數とすれば次式が成立つ．

$$\int_0^1\cdots\int_0^1|\triangle(u)|^{2z}du_1\cdots du_p=\frac{1}{\{\Gamma(1+z)\}^p}\prod_{\nu=1}^{p}\frac{\Gamma(1+\nu z)\Gamma^2\{1+(\nu-1)z\}}{\Gamma\{2+(p+\nu-2)z\}}.$$

## §40. Pochhammer によるベータ函數の積分表示

§23 に於てガンマ函數にたいする Hankel の積分表示を導いたと同様な考えを Pochhammer はベータ函數の積分表示を得るのに用いた.[2]

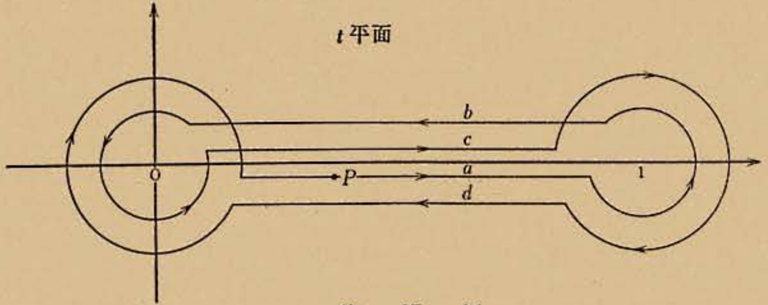
いま $P$ を實軸上の 0 と 1 の間の任意の點として

$$F(\alpha,\beta)=e^{-\pi i(\alpha+\beta)}\int_P^{(1+,0+,1-,0-)}t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}dt \tag{40.1}$$

なる積分を考える．ここに積分記號は積分路がまず $P$ から出發して點 1 のまわりを正に（反時針の向きに）まわって $P$ にもどり，次に原點のまわりを正にめぐってまた $P$ にもどるという風にとられることを意味する（このような路を**二重路**という）.

出發點 $P$ では $t, 1-t$ の偏角はいずれも 0 である；めぐり (1+) の後にはそれらはそれぞれ 0, $2\pi$ になる；めぐり (0+) の後には $2\pi, 2\pi$ になる；めぐり (1−) の後には $2\pi$, 0 になる；最後にめぐり (0−) の後には 0,0 となって被積分函數は最初の値と同じになることがわかる.[3]

積分路はそれが被積分函數の分岐點 0,1 を過ぎらない限り變形してよいから圖に示されている 4




第 37 圖

[1] A. Selberg, *Remarks on a multiple integral*, Norsk Mat. Tidsskr. **26** (1944), 71–78.

[2] L. Pochhammer, *Zur Theorie der Eulerschen Integrale*, Math. Ann. **35** (1890), pp. 495–526.

[3] 積分 (40.1) の被積分函數は一般に $t=0$, 1 を分岐點にもつ．$\alpha,\beta$ が整數でない有理數のときは代數分岐點，無理數のときは對數分岐點である．ここにとられた積分路は被積分函數の Riemann 面上に於てこれらの分岐點を中に含んで巡る一つの閉曲線になっているわけである．

つの平行線は實軸と一致すると考える.

いま $\Re\alpha>0$, $\Re\beta>0$ とすれば, 容易に示されるように, 圓のまわりの積分は半徑が 0 に近づくとともに 0 に近づく. そして $a,b,c,d$ と記された路の上では被積分函數はそれぞれ

$$(40.2)\qquad \begin{cases} t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}, & t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}e^{2\pi i(\beta-1)}, \\ t^{\alpha-1}e^{2\pi i(\alpha-1)}(1-t)^{\beta-1}e^{2\pi i(\beta-1)}, & t^{\alpha-1}e^{2\pi i(\alpha-1)}(1-t)^{\beta-1} \end{cases}$$

となる, 但しこれらに於て $t$ と $1-t$ の偏角はすべて 0 としてである.

よって

$$(40.3)\qquad F(\alpha,\beta)=e^{-\pi i(\alpha+\beta)}\left[\int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}dt+\int_1^0 t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}e^{2\pi i\beta}dt\right.$$
$$\left.+\int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}e^{2\pi i(\alpha+\beta)}dt+\int_1^0 t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}e^{2\pi i\alpha}dt\right]$$

が成立ち, 従って

$$(40.4)\qquad F(\alpha,\beta)=e^{-\pi i(\alpha+\beta)}(1-e^{2\pi i\alpha})(1-e^{2\pi i\beta})\int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}dt$$
$$=-4\sin\pi\alpha\cdot\sin\pi\beta\cdot B(\alpha,\beta)$$

を得る. この式は $\Re\alpha>0$, $\Re\beta>0$ と假定して導いたのであるが, 左邊は $\alpha,\beta$ のすべての値にたいして $\alpha,\beta$ の正則函數であるから, 解析接續の理論によりこの關係によってすべての $\alpha,\beta$ にたいする解析函數 $B(\alpha,\beta)$ を定義することができる. 即ちすべての $\alpha,\beta$ にたいし積分表示

$$(40.5)\qquad B(\alpha,\beta)=-\frac{1}{4\sin\pi\alpha\sin\pi\beta}e^{-\pi i(\alpha+\beta)}\int^{(1+,0+,1-,0-)} t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}dt$$

或は

$$(40.6)\qquad \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(1-\beta)\Gamma(\alpha+\beta)}=-\frac{1}{4\pi^2}e^{-\pi i(\alpha+\beta)}\int_P^{(1+,0+,1-,0-)} t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}dt$$

が成立つ.

## §41. 超幾何函數の積分表示

再び $|z|<1$ で收斂なる (38.1) の級數

$$(41.1)\qquad F(\alpha,\beta;\gamma;z)=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha+1)\cdots\cdots(\alpha+r-1)\beta(\beta+1)\cdots\cdots(\beta+r-1)}{r!\,\gamma(\gamma+1)\cdots\cdots(\gamma+r-1)}z^r$$

を考える. これに $\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\alpha)/\Gamma(\gamma)$ をかけて變形すれば

$$\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\alpha)}{\Gamma(\gamma)}F(\alpha,\beta;\gamma;z)=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{\Gamma(\alpha+r)\Gamma(\gamma-\alpha)}{\Gamma(\gamma+r)}\cdot\frac{\beta(\beta+1)\cdots\cdots(\beta+r-1)}{r!}z^r$$
$$=\sum_{r=0}^{\infty}\int_0^1 t^{\alpha+r-1}(1-t)^{\gamma-\alpha-1}dt\cdot\frac{\beta(\beta+1)\cdots\cdots(\beta+r-1)}{r!}z^r$$
$$=\int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\gamma-\alpha-1}dt\cdot\sum_{r=0}^{\infty}\frac{\beta(\beta+1)\cdots\cdots(\beta+r-1)}{r!}(tz)^r$$

$$=\int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\gamma-\alpha-1}dt\cdot(1-tz)^{-\beta}.$$

よって $\Re\alpha>0$, $\Re(\gamma-\alpha)>0$ なるとき

$$F(\alpha,\beta;\gamma;z)=\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\alpha)}\int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\gamma-\alpha-1}(1-tz)^{-\beta}dt \tag{41.2}$$

なる表示が得られる.

次にこの右邊の積分にたいして第 37 圖の積分路についての積分

$$w=\int^{(1+,0+,1-,0-)} t^{\alpha-1}(1-t)^{\gamma-\alpha-1}(1-tz)^{-\beta}dt \tag{41.3}$$

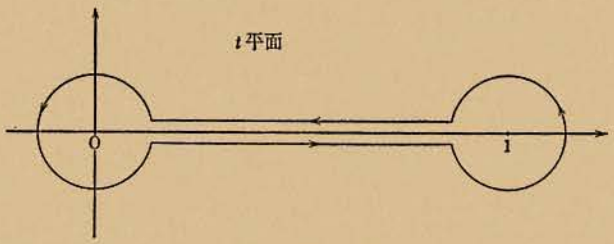
を考える. 但し積分路は點 $t=1/z$ をその中に含まないものとする. §40 と同様に計算すれば $\Re\alpha>0$, $\Re(\gamma-\alpha)>0$ なるとき

$$w=\{1-e^{2\pi i(\gamma-\alpha)}\}\{1-e^{2\pi i\alpha}\}\int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\gamma-\alpha-1}(1-tz)^{-\beta}dt$$

となることが示される. よって $|z|<1$ にたいして

$$F(\alpha,\beta;\gamma;z)=\frac{1}{\{1-e^{2\pi i(\gamma-\alpha)}\}\{1-e^{2\pi i\alpha}\}}\cdot\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\alpha)}\int^{(1+,0+,1-,0-)} t^{\alpha-1}(1-t)^{\gamma-\alpha-1}(1-tz)^{-\beta}dt \tag{41.4}$$

なる表示が得られる. この式はまず $\Re\alpha>0$, $\Re(\gamma-\alpha)>0$ の制限の下に導かれたのであるが任意の $\alpha,\beta,\gamma$ について成立つことがこのことから結論される.




第 38 圖

但し $\gamma$ が正整數の場合には $t=0$ および $t=1$ を共に同じ向きにめぐれば兩點に於ける偏角の增減は相殺して所要の Riemann 面上での閉曲線が得られ (41.4) の代わりに

$$F(\alpha,\beta;\gamma;z)=\frac{1}{(1-e^{-2\pi i\alpha})}\cdot\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\alpha)}\int^{(1+,0+)} t^{\alpha-1}(1-t)^{\gamma-\alpha-1}(1-tz)^{-\beta}dt \tag{41.5}$$

が成り立つ.

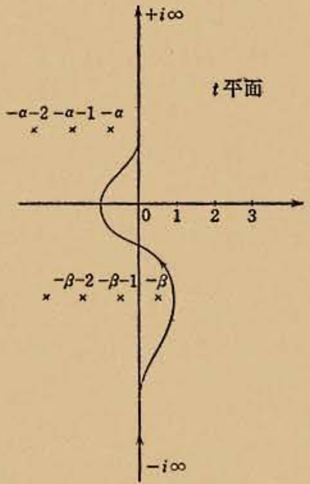
## §42. 超幾何函數の Barnes の積分表示[1]

いま $|\mathrm{arc}(-z)|<\pi$ として

$$I=\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{\Gamma(\alpha+t)\Gamma(\beta+t)}{\Gamma(\gamma+t)}\Gamma(-t)(-z)^t dt \tag{42.1}$$

---

[1] E. W. Barnes, Proc. London Math. Soc. (2) 6 (1908), pp. 141–177.




第 39 圖

なる複素積分を考える．ここに積分路 $C$ は $t$ 平面の虚軸に平行に $-i\infty$ から $i\infty$ に走るもので，$\Gamma(-t)$ の極 $t=0,1,2,3,\cdots\cdots$ は $C$ の右側に $\Gamma(\alpha+t)$ および $\Gamma(\beta+t)$ の極 $t=-\alpha,\ -\alpha-1,\ -\alpha-2,\ \cdots\cdots$ および $t=-\beta,\ -\beta-1,\ -\beta-2,\ \cdots\cdots$ は $C$ の左側にあるように適當にとられた第 39 圖のような曲線とする．さらに $\alpha$ と $\beta$ は ここに述べた曲線 $C$ が描かれるような値で，従って 0 または負整數ではないとする．

$$-z=re^{i\theta}$$

とおくと，上の假定により $-\pi<\theta<\pi$ である．次にまず積分 (42.1) の收斂について調べてみよう．

$t=is\ (s\to+\infty)$ にたいしては，(27.17) の第 1 項で見積ると，例えば

$$|\Gamma(\alpha+t)|\sim|\sqrt{2\pi}(\alpha+t)^{\alpha+t-\frac{1}{2}}e^{-(\alpha+t)}|$$

$$=\sqrt{2\pi}|e^{(\alpha+t-\frac{1}{2})\ln(\alpha+t)}|\cdot|e^{-(\alpha+t)}|$$

$$=\sqrt{2\pi}e^{(\Re\alpha-\frac{1}{2})\ln|\alpha+t|-(\Im m\,\alpha+s)\operatorname{arc}(\alpha+t)}\cdot e^{-\Re\alpha}$$

$$\sim\sqrt{2\pi}e^{-\Re\alpha}|t|^{\Re\alpha-\frac{1}{2}}e^{-\frac{\pi}{2}s}$$

となり，
$$|(-z)^t|=|e^{t\ln(-z)}|=e^{-s\theta}$$

であるから，被積分函數は

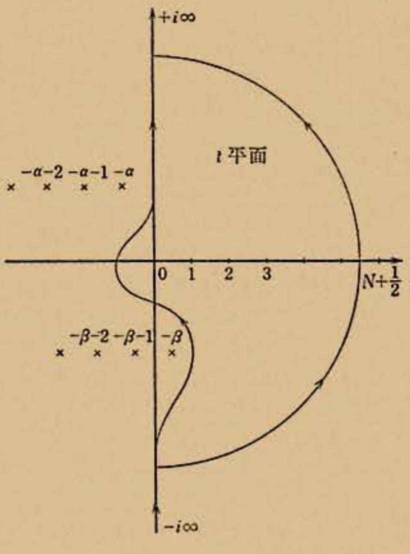
$$O[|t|^{\Re(\alpha+\beta-\gamma-1)}e^{-\pi s-s\theta}]$$

となる．同様に $t=-is\ (s\to+\infty)$ にたいしては

$$O[|t|^{\Re(\alpha+\beta-\gamma-1)}e^{-\pi s+s\theta}]$$

となる．假定 $-\pi<\theta<\pi$ によりこれらはいずれも $s\to+\infty$ のとき指數函數的に消えるから積分 (42.1) は正實軸をとり除いた全有限平面で廣義一様收斂しそこで $z$ の正則函數を表わすことがわかる．次にこの正則函數は $|z|<1$ なるとき級數

$$(42.2)\qquad \sum_{r=0}^{\infty}\frac{\Gamma(\alpha+r)\Gamma(\beta+r)}{r!\ \Gamma(\gamma+r)}z^r=\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}F(\alpha,\beta;\gamma;z)$$




第 40 圖

に等しいことを證明しよう．そのため $N$ を大きな自然數として原點を中心，半徑 $N+\frac{1}{2}$ なる半圓 $K$ を虚軸の右側に描いてそれに沿うての積分

(42.3)
$$\frac{1}{2\pi i}\int_K \frac{\Gamma(\alpha+t)\Gamma(\beta+t)}{\Gamma(\gamma+t)}\Gamma(-t)(-z)^t dt$$

を考え，この値が $N\to\infty$ のとき 0 に近迫することを示そう．關係 $\Gamma(-t)\Gamma(1+t)=-\pi/\sin\pi t$ を用いて被積分函數を

$$\frac{\Gamma(\alpha+t)\Gamma(\beta+t)}{\Gamma(\gamma+t)\Gamma(1+t)}\cdot\frac{\pi(-z)^t}{\sin\pi t}$$

のように表わせば，$t=\left(N+\frac{1}{2}\right)e^{i\varphi}(N\to\infty)$ として前と同様に見積ると

(42.4)
$$\left|\frac{\Gamma(\alpha+t)\Gamma(\beta+t)}{\Gamma(\gamma+t)\Gamma(1+t)}\right|\leqq AN^{\Re(\alpha+\beta-\gamma-1)}$$

なることが示される．但し $A$ は半圓上の $\mathrm{arc}\,t=\varphi$ に無關係な常數である．また $N\to\infty$ のとき

$$|\sin\pi t|\sim\frac{1}{2}e^{(N+\frac{1}{2})\pi|\sin\varphi|}$$

なることから

$$\left|\frac{(-z)^t}{\sin\pi t}\right|\sim 2\exp\left\{\left(N+\frac{1}{2}\right)\cos\varphi\cdot\ln|z|-\left(N+\frac{1}{2}\right)\sin\varphi\cdot\mathrm{arc}(-z)-\left(N+\frac{1}{2}\right)\pi|\sin\varphi|\right\}$$

が成立つ．假定により $|\mathrm{arc}(-z)|\leqq\pi-\delta\ (\delta>0)$ とすれば，この式から確かに

(42.5)
$$\left|\frac{(-z)^t}{\sin\pi t}\right|=O\left[\exp\left\{-\frac{1}{\sqrt{2}}\left(N+\frac{1}{2}\right)\ln\frac{1}{|z|}\right\}\right],\qquad 0\leqq|\varphi|\leqq\frac{\pi}{4},$$
$$=O\left[\exp\left\{-\frac{1}{\sqrt{2}}\left(N+\frac{1}{2}\right)\delta\right\}\right],\qquad \frac{\pi}{4}\leqq|\varphi|\leqq\frac{\pi}{2}$$

が成立つことがわかる．よって $\ln\frac{1}{|z|}$ が正卽ち $|z|<1$ ならば $0\leqq\varphi\leqq\frac{\pi}{2}$ のすべての $\varphi$ にたいして被積分函數は十分速やかに 0 に近迫し $N\to\infty$ とともに $\int_K\to 0$ なることがわかる．

ところで Cauchy の積分定理により

(42.6)
$$\int_{-\infty i}^{\infty i}-\left\{\int_{-\infty i}^{-(N+\frac{1}{2})i}+\int_K+\int_{(N+\frac{1}{2})i}^{\infty i}\right\}$$

は點 $t=0,1,2,\cdots\cdots,N$ に於ける被積分函數の留數の總和の $-2\pi i$ 倍に等しい．$t=n$ に於ける留數 $R_n$ は $\Gamma(-t)$ の $t=n$ に於ける一位の極に基くのであるから

(42.7)
$$R_n=\lim_{t\to n}(t-n)\frac{\Gamma(\alpha+t)\Gamma(\beta+t)}{\Gamma(\gamma+t)}\Gamma(-t)(-z)^t$$

として計算される．

$$\Gamma(-t)=\frac{\Gamma(-t+n+1)}{(-t+n)(-t+n-1)\cdots\cdots(-t+1)(-t)}$$

を入れて計算すると

(42.8)
$$R_n=-\frac{\Gamma(\alpha+n)\Gamma(\beta+n)}{n!\ \Gamma(\gamma+n)}z^n$$

となる．これで求める式：$|\mathrm{arc}(-z)|<\pi,\ |z|<1$ なるとき

(42.9)
$$\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty i}^{\infty i}\frac{\Gamma(\alpha+t)\Gamma(\beta+t)\Gamma(-t)}{\Gamma(\gamma+t)}(-z)^t dt=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{\Gamma(\alpha+r)\Gamma(\beta+r)}{r!\ \Gamma(\gamma+r)}z^r$$

が導かれた．

**問．** 任意位數 $\nu$ の Bessel の微分方程式

$$\frac{d^2w}{dz^2}+\frac{1}{z}\frac{dw}{dz}+\left(1-\frac{\nu^2}{z^2}\right)w=0$$

の特解

$$J_\nu(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\left(\frac{z}{2}\right)^{\nu+2k}}{k!\ \Gamma(\nu+k+1)}$$

を考える．$z^\nu$ のため $\nu$ が整數でないときは多價になるから $-\pi<\mathrm{arc}\,z\leqq\pi$ として一價な分枝を考える．公式

$$\frac{1}{\Gamma(z)}=\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{(0+)}t^{-z}e^t dt$$

を用いて $J_\nu(z)$ の次の積分表示を導け．

$$J_\nu(z)=\frac{1}{2\pi i}\left(\frac{z}{2}\right)^\nu\int_{-\infty}^{(0+)}t^{-\nu-1}e^{t-\frac{z^2}{4t}}dt.$$

# 附　　　錄 I

本文でしばしば用いる解析學の基本定理を特殊函數の研究に使うことの見地から簡單に説明しておこう．まず

**定理 1.** 區間 $I: a \leqq x \leqq b$ に於て連續な有限個の函數 $u_1(x), u_2(x), \cdots\cdots, u_n(x)$ の和

$$f(x)=u_1(x)+u_2(x)+\cdots\cdots+u_n(x)$$

はまた $I$ に於て連續であり，$f(x)$ の積分は

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^b u_1(x)dx+\int_a^b u_2(x)dx+\cdots\cdots+\int_a^b u_n(x)dx$$

として求められる．(和と積分の順序變更)．さらに $u_1(x), \cdots\cdots, u_n(x)$ が $I$ に於て連續微分可能であれば和 $f(x)$ もまた $I$ に於て連續微分可能で，微係數は

$$f'(x)=u_1'(x)+u_2'(x)+\cdots\cdots+u_n'(x)$$

として求められる．(和と微分の順序變更)．

これに相當してパラメータ $t$ に依存する函數の積分について次の定理が成立つ．

**定理 2.** $f(t, x)$ が區間 $I=I_t \times I_x$ (但し $I_t: \alpha \leqq t \leqq \beta$, $I_x: a \leqq x \leqq b$) に於て $(t, x)$ の連續函數であればパラメータ $t$ についての積分

$$\varphi(x)=\int_\alpha^\beta f(t, x)dt$$

は $I_x$ に於て連續であり，$\varphi(x)$ の積分は

$$\int_a^b \varphi(x)dx=\int_\alpha^\beta \left\{\int_a^b f(t, x)dx\right\}dt$$

として求められる (積分の順序變更)．さらに $\dfrac{\partial f}{\partial x} \equiv f_x(t, x)$ が $I$ に於て存在し $(t, x)$ の連續函數であれば $\varphi(x)$ は $I_x$ に於て連續微分可能で，微係數は

$$\frac{d\varphi}{dx}=\int_\alpha^\beta \frac{\partial f}{\partial x}dt$$

として求められる (積分と微分の順序變更)．

しかし無限級數，無限積分に關して同樣な結果を期待するには**收斂の一樣性**を假定せねばならない．

級數 $\sum_{i=1}^{\infty} u_i(x) \equiv \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} u_i(x)$ が $I: a \leqq x \leqq b$ のおのおのの $x$ にたいし收斂で和を $f(x)$ としたとき，もし任意の $\varepsilon > 0$ にたいし $I$ の $x$ に無關係な十分大なる自然數 $N$ が定められて

$$|f(x)-\sum_{i=1}^{n} u_i(x)| < \varepsilon, \qquad (n > N)$$

が，或は同じことであるが

$$\left|\sum_{i=n}^{m} u_i(x)\right| < \varepsilon, \qquad (n, m > N)$$

が成立つならば，級数は $I$ に於て一様收斂であるという．同様に無限積分

$$\int_a^\infty f(t, x)dt \equiv \lim_{T\to+\infty}\int_a^T f(t, x)dt$$

が $I$ のおのおのの $x$ にたいし收斂で積分を $\varphi(x)$ としたとき，もし任意の $\varepsilon>0$ にたいし $I$ の $x$ に無關係な十分大なる一數 $g(>a)$ が定められて

$$\left|\varphi(x)-\int_a^T f(t, x)dt\right| = \left|\int_T^\infty f(t, x)dt\right| < \varepsilon, \qquad (T>g)$$

が，或は同じことであるが

$$\left|\int_{T'}^{T''} f(t, x)dt\right| < \varepsilon, \quad (T', T''>g)$$

が成立つならば，積分は $I$ に於て一様收斂であるという．すると

**定理 3.** 區間 $I: a\leq x\leq b$ に於て連續な函數を項とする級數

$$f(x) = u_1(x) + u_2(x) + \cdots\cdot$$

が $I$ に於て一様收斂であれば，和 $f(x)$ は $I$ に於て連續であり且つ

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b u_1(x)dx + \int_a^b u_2(x)dx + \cdots\cdot$$

が成立つ (和と積分の順序變更).

**定理 4.** (i) $f(t, x)$ が區間 $I = I_t \times I_x$ (但し $I_t: \alpha\leq t<\infty$, $I_x: a\leq x\leq b$) に於て $(t, x)$ の連續函數で，(ii) 積分 $\int_\alpha^\infty f(t, x)dt$ が $I_x$ に於て一様收斂であれば

$$\varphi(x) = \int_\alpha^\infty f(t, x)dt$$

は $I_x$ に於て $x$ の連續函數であり，$\varphi(x)$ の積分は

$$\int_a^b \varphi(x)dx = \int_\alpha^\infty \left\{\int_a^b f(t, x)dx\right\} dt$$

として求められる．(積分の順序變更).

定理 4 を證明しよう．(定理 3 の證明は同様になる)．$x_0, x_0+\Delta x \in I_x$ をとり

$$\varphi(x_0+\Delta x) - \varphi(x_0) = \int_\alpha^\infty f(t, x_0+\Delta x)dt - \int_\alpha^\infty f(t, x_0)dt$$

を

$$(1) \qquad = \int_\alpha^T [f(t, x_0+\Delta x) - f(t, x_0)]dt + \int_T^\infty f(t, x_0+\Delta x)dt - \int_T^\infty f(t, x_0)dt$$

と書いてみる．假定 (ii) により $\varepsilon>0$ にたいし $g$ を $I_x$ の $x$ に無關係に十分大にとることにより

$$\left|\int_T^\infty f(t,x)dt\right|<\frac{\varepsilon}{3}, \qquad g<T$$

が成立つ．いまこのような $T$ の一つの値 $T_0$ をとって (1) に於て $T=T_0$ とした式を考えると，假定 (i) により $\int_\alpha^{T_0} f(t,x)dt$ は $x$ の連續函數で，十分小さな $\delta>0$ をとれば

$$\left|\int_\alpha^{T_0}[f(t,x_0+\Delta x)-f(t,x_0)]dt\right|<\frac{\varepsilon}{3}, \qquad |\Delta x|<\delta$$

となるから結局

$$|\varphi(x_0+\Delta x)-\varphi(x_0)|<\varepsilon, \qquad |\Delta x|<\delta$$

が從う．次に定理後半は

$$\int_a^b \varphi(x)dx=\lim_{T\to\infty}\int_\alpha^T dt\int_a^b f(t,x)dx$$

卽ち

$$\left|\int_a^b \varphi(x)dx-\int_\alpha^T dt\int_a^b f(t,x)dt\right|<\varepsilon, \qquad g<T$$

を示すことであるが，このことは有限區間の積分の順序變更の定理により

$$\begin{aligned}\int_a^b \varphi(x)dx&-\int_\alpha^T dt\int_a^b f(t,x)dt\\ &=\int_a^b dx\int_\alpha^\infty f(t,x)dt-\int_a dx\int_\alpha^T f(t,x)dt\\ &=\int_a^b dx\int_T^\infty f(t,x)dt\end{aligned}$$

と書かれ，これにたいし假定 (ii) により

$$\left|\int_T^\infty f(t,x)dt\right|<\frac{\varepsilon}{b-a}, \qquad g<T$$

が成立つことから從う．

微分については通常次の定理が役立つ．

**定理 5.** $I: a\leqq x\leqq b$ に於て (i) $\sum_{n=1}^\infty u_n(x)=f(x)$ が收斂，(ii) $u_n(x)$ が連續微分可能，(iii) $\sum_{n=1}^\infty u_n'(x)$ が一樣收斂ならば，和 $f(x)$ も $I$ に於て連續微分可能で且つ

$$f'(x)=u_1'(x)+u_2'(x)+\cdots\cdots$$

が成立つ．

**定理 6.** (i) 積分 $\varphi(x)=\int_\alpha^\infty f(t,x)dt$ は $I_x: a\leqq x\leqq b$ で收斂，(ii) $\partial f/\partial x\equiv f_x(t,x)$ は $I=I_t\times I_x$ (但し $I_t: \alpha\leqq t<\infty$) で存在し且つ連續，(iii) 積分 $\int_\alpha^\infty \frac{\partial f}{\partial x}dt$ は $I_x$ で一樣收斂であるならば，$\varphi(x)$ は $I_x$

に於て連續微分可能で且つ

$$\frac{d\varphi}{dx}=\int_{\alpha}^{\infty}\frac{\partial f}{\partial x}dt$$

が成立つ.

[**定理6の證明**] (定理 5 の證明は同樣).

(iii) により

$$\psi(x)=\int_{\alpha}^{\infty}\frac{\partial f}{\partial x}dt$$

とおくと定理 4 により

$$\int_{a}^{x}\psi(x)dx=\int_{\alpha}^{\infty}dt\int_{a}^{x}\frac{\partial f}{\partial x}dt$$

$$=\int_{\alpha}^{\infty}dt[f(t,x)-f(t,a)]$$

$$=\int_{\alpha}^{\infty}f(t,x)dt-\int_{\alpha}^{\infty}f(t,a)dt$$

が從う. よって

$$\int_{a}^{x}\psi(x)dx=\varphi(x)-\varphi(a).$$

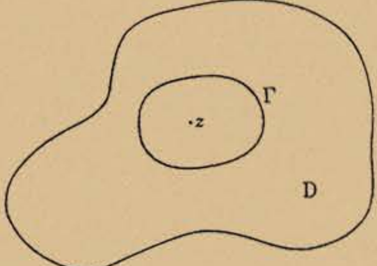
$$\therefore\quad \frac{d\varphi}{dx}=\psi(x).$$

注意. 被積分函數の積分區間 $\alpha\leqq t\leqq\beta$ の例えば下端に於ける異常性にもとづく積分

$$\int_{\alpha}^{\beta}f(t,x)dt=\lim_{\mu\to\alpha}\int_{\mu}^{\beta}f(t,x)dt$$

にたいしても無限積分に相當する定理が成立つが, いまは省略する. $t-\alpha=\frac{1}{\tau}$ と變換すれば $\tau$ についての無限積分の場合に歸せられる.

次に複素解析函數についての類似の定理を述べよう. これらは上に述べた實函數の定理よりも取扱が簡明でガンマ函數のような解析函數の研究にはより有效である. 複素變數 $z=x+iy$ の平面上の圓板や圓環などの境界を入れないいわゆる開いた連結點集合を**領域**というのであるが, 一つの領域 $D$ のおのおのの點 $z$ に於て定義せられた函數 $w=f(z)$ が $D$ の各點で微分可能なるとき $f(z)$ は $D$ に於て (一價) **正則函數**であるといわれる. Cauchy の積分表示によると, 點 $z\in D$ に於ける函數の値は, $z$ を內部の點とする $D$ 內の任意の單純閉正則曲線 $\Gamma$ をとったとき



第 41 圖

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{f(t)}{t-z}dt$$

と表わされ，このため定理 2 により微係數 $f'(z)$ が積分記號下で微分した

$$f'(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{f(t)}{(t-z)^2}dt$$

で與えられることがわかるのみならず $f(z)$ は何回でも連續微分可能で

$$f^{(n)}(z)=\frac{n!}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{f(t)}{(t-z)^{n+1}}dt$$

が成立つことが從う．また $f(z)$ が $D$ の任意の點 $z_0$ を中心として羃級數

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n$$

に展開されることも上の表示からの歸結である．

定理 1 に相當して領域 $D$ に於て正則な有限個の函數 $f_1(z), f_2(z), \cdots\cdots, f_n(z)$ の和

$$f(z)=f_1(z)+f_2(z)+\cdots\cdots+f_n(z)$$

はまた $D$ に於て正則であるが，定理 2 に相當しては次の定理が證明される．

**定理 7.** (i) $f(t, z)$ は，$t$ 平面上の正則曲線 $C$ と $z$ 平面上の領域 $D$ が與えられて，$t\in C$, $z\in D$ なる二變數 $t, z$ の函數として連續で，(ii) $C$ 上の一點 $t$ を固定したとき $z\in D$ の正則函數であるとすれば，積分

$$F(z)=\int_{C}f(t, z)dt$$

で定義された函數 $F(z)$ は $z\in D$ の正則函數であって，微係數は

$$F'(z)=\int_{C}\frac{\partial f}{\partial z}dt$$

として求められる．從って高次の微係數も同樣に計算される．

領域 $D$ に於て正則な函數からなる函數列 $\{f_n(z)\}$ は $D$ に含まれる任意の有界閉集合の上で一樣收斂なるとき **$D$ に於て廣義一樣收斂である**という．正則函數は領域で取扱うのが本來であるからこの概念が適切であり便利である．(例えば羃級數 $1+z+z^2+\cdots\cdots+z^n+\cdots\cdots$ は收斂圓 $|z|=1$ の內部 $|z|<1$ で廣義一樣收斂ではあるが一樣收斂ではない)．そしてこのことに相當して次の基本的な **Weierstrass の定理**が成立つのである．本文では系列の形に述べたが無限級數の形に與えれば

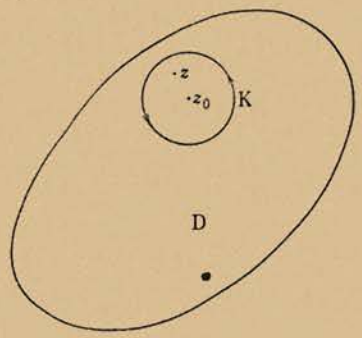
**定理 8.** $\{f_n(z)\}$ の函數は領域 $D$ に於て正則で且つ

$$f(z)=f_1(z)+f_2(z)+\cdots\cdots+f_n(z)+\cdots\cdots$$

は $D$ に於て廣義一樣收斂であるとすれば，和 $f(z)$ は $D$ に於て正則で且つ $D$ に於て項每微分法

$$f^{(p)}(z)=f_1^{(p)}(z)+f_2^{(p)}(z)+\cdots\cdots+f_n^{(p)}(z)+\cdots\cdots$$

が成立つ．しかもこの右邊の級數も $D$ に於て廣義一様收斂である．




第 42 圖

［證明］ 級數の部分和を

$$S_n(z)\equiv f_1(z)+f_2(z)+\cdots\cdots+f_n(z),\qquad (n=1,2,\cdots\cdots)$$

とすれば $S_n(z)$ は $D$ で正則であるから，$z_0$ を $D$ の任意の點，$K:|z-z_0|=r_0$ をその內部とともに $D$ に含まれる圓とすれば

$$S_n(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_K\frac{S_n(t)}{t-z}dt,\qquad (|z-z_0|<r_0)$$

が成立つ．これに於て $z$ を固定して $n\to\infty$ ならしめれば，假定により $S_n(z)\to f(z)$，そして右邊に於ては圓 $K$ の上の函數列として $\left\{\dfrac{S_n(t)}{t-z}\right\}$ は $\left\{\dfrac{f(t)}{t-z}\right\}$ に $K$ の上で一様收斂するから定理 3 により關係

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_K\frac{f(t)}{t-z}dt\qquad (|z-z_0|<r_0)$$

が從う．よって $f(z)$ は點 $z_0$ の近傍で正則，ところで $z_0$ は $D$ の任意の點であったから $f(z)$ が $D$ に於て正則であることが證明せられた．

次に $z$ に關し $p$ 回微分することにより上の二式から

$$S_n^{(p)}(z)=\frac{p\,!}{2\pi i}\int_K\frac{S_n(t)}{(t-z)^{p+1}}dt,\qquad (|z-z_0|<r_0)$$

および

$$f^{(p)}(z)=\frac{p\,!}{2\pi i}\int_K\frac{f(t)}{(t-z)^{p+1}}dt,\qquad (|z-z_0|<r_0)$$

が從い，これより $n\to\infty$ のとき $S_n^{(p)}(z)\to f^{(p)}(z)$ がいえるがこの收斂が $D$ に於て廣義一様收斂である．なんとなれば假定により $\varepsilon>0$ にたいし十分大なる自然數 $N$ をとって有界閉集合なる圓 $K:|z-z_0|=r_0$ の上で

$$|S_n(t)-f(t)|<\varepsilon\qquad (n>N)$$

が成立つようにすれば，$|z-z_0|<\dfrac{r_0}{2}$ なる $z$ にたいし

$$|S_n^{(p)}(z)-f^{(p)}(z)|=\frac{p!}{2\pi}\left|\int_K\frac{S_n(t)-f(t)}{(t-z)^{p+1}}dt\right|$$
$$\leq\frac{p!}{2\pi}\cdot\frac{\varepsilon}{\left(\dfrac{r_0}{2}\right)^{p+1}}\cdot 2\pi r_0=\frac{p\,!\,2^{p+1}\varepsilon}{r_0^{\,p}}$$

が成立つから，まず $D$ の任意の點 $z_0$ に一つの近傍 $U(z_0):|z-z_0|<\dfrac{r_0}{2}$ が對應してそこで收斂が一

様であることがわかる．すると $D$ の任意の有界閉集合 $S$ は Borel の被いの定理によりかかる近傍の有限個で被われることより $S$ で收斂が一樣であることが從うからである．(證明了)

なおいま $D$ の一點を $a$ とし $a$ を中心として $D$ に含まれる最大圓板を $|z-a|<R$ とすれば，假定によりここに於て

$$f_n(z)=\sum_{k=0}^{\infty}c_k^{(n)}(z-a)^k, \qquad (n=1,2,\cdots\cdots)$$

と表わされるが Weierstrass の定理により

$$f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}c_k^{(n)}(z-a)^k$$

はまた $|z-a|<R$ に於て正則である．よって $|z-a|<R$ に於て

$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}c_k(z-a)^k$$

に展開される．この係數は

$$c_k=\sum_{n=1}^{\infty}c_k^{(n)}$$

として計算される．このことは **Weierstrass の二重級數に關する定理**として知られている事實で，Weierstrass の定理後半から從う．即ち特に $z=a$ に於て成立つ式

$$f^{(p)}(a)=\sum_{n=1}^{\infty}f_n^{(p)}(a)$$

を冪級數からつくれば

$$c_p p\,!=\sum_{n=1}^{\infty}c_p^{(n)}p\,!$$

が得られ，この兩邊を $p!$ で割ればよい．

無限積分に關する定理は

**定理 9.** 定理 7 の假定に於て $C$ を $\infty$ にゆく曲線でその任意の有限な部分が正則曲線であるとし，そこの假定が $C$ のいかなる有限な部分についても滿足されるとし，さらに無限積分

$$F(z)=\int_C f(t,z)dt$$

は $z$ の領域 $D$ に於て廣義一樣收斂であるとすれば，定理 7 の結論がやはり成立つ．

[證明] いま $C_n$ を圓 $|z|=n$ の內部の $C$ の部分とし

$$F_n(z)=\int_{C_n}f(t,z)dt$$

とおけば定理 7 により $F_n(z)$ $(n=1,2,\cdots\cdots)$ はすべて $D$ に於て正則であり，$n\to\infty$ とともに假定により $D$ の $z$ に關し廣義一樣に $F(z)$ に收斂する．よって Weierstrass の定理により $F(z)$ は $D$ に

於て正則である．さらに再び Weierstrass の定理および定理 7 により

$$F'(z)=\lim_{n\to\infty}F_n'(z)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\int_{C_n}\frac{\partial f}{\partial z}dt$$

$$=\int_{C}\frac{\partial f}{\partial z}dt$$

が成立つ．

**注意**．有限な積分路 $C$ の一端に於て $f(t,z)$ が有界でないときの異常積分についても同様な定理が成立つ．即ちこのときもその積分の收斂が $z$ の領域 $D$ に於て廣義一樣なる限り $F(z)$ は $z$ の正則函數を表わす．

最後に本文では用いなかったが定理 4 にたいして無限積分の順序變更に關する次の定理を述べておこう．

**定理 10.** (i) $f(t,x)$ は $\alpha\leqq t<\infty$, $a\leqq x<\infty$ で $(t,x)$ の連續函數, (ii) $\int_a^\infty f(t,x)dt$ は $a\leqq x<\infty$ に於て廣義一樣收斂, (iii) $\int_a^\infty f(t,x)dx$ は $\alpha\leqq t<\infty$ に於て廣義一樣收斂, (iv) $\int_a^\infty dt\int_a^X f(t,x)dx$ は $a\leqq X<\infty$ で一樣收斂とすれば次の累次積分が存在し且つ相等しい．

$$\int_a^\infty dt\int_a^\infty f(t,x)dx=\int_a^\infty dt\int_a^\infty f(t,x)dt$$[1].

次に**無限積**について考える．無限積

$$\prod_{n=1}^{n}(1+a_n)=(1+a_1)(1+a_2)(1+a_3)\cdots\cdot$$

は部分積

$$p_n=\prod_{m=1}^{n}(1+a_m)$$

が $n\to\infty$ のとき 0 と相異る値に收斂する場合に收斂すると定義するので，$p_n$ が 0 に收斂する場合には無限積は 0 に發散するという．すると無限積が收斂であれば，$a_n\to 0$ でなければならないことがすぐ從う．

無限積 $\Pi(1+a_n)$ は無限積 $\Pi(1+|a_n|)$ が收斂なるとき絶對收斂するといわれるが，$a_n\geqq 0$ のとき成立つ關係

$$a_1+a_2+\cdots\cdot+a_n\leqq(1+a_1)\cdots\cdot(1+a_n)\leqq e^{a_1+a_2+\cdots+a_n}$$

から明らかなように**無限積 $\Pi(1+a_n)$ が絶對收斂するためには級數 $\sum a_n$ が絶對收斂することが必**

[1] 證明には少しく準備が要るので省略する．例えば次の書物を參照されたい． W. F. Osgood, *Functions of real Variables*, 1936. p. 287.

**要且つ十分である**．ところで上のように定義されるのは次の事實があるからである．

**絶對收斂する無限積はつねに收斂である．**

［證明］

$$P_n=\prod_{m=1}^{n}(1+|a_m|)$$

とおけば

$$p_n-p_{n-1}=(1+a_1)\cdots\cdots(1+a_{n-1})a_n,$$
$$P_n-P_{n-1}=(1+|a_1|)\cdots\cdots(1+|a_{n-1}|)|a_n|$$

で明らかに

$$|p_n-p_{n-1}|\leqq P_n-P_{n-1}.$$

$\Pi(1+|a_n|)$ は收斂だから $\{P_n\}$ は收斂，從って $\sum(P_n-P_{n-1})$ は收斂する．よって比較定理により $\sum(P_n-P_{n-1})$ は收斂，從って $\{P_n\}$ は收斂する．但しこの極限が 0 でないことを示さねばならない．$\sum|a_n|$ は收斂で $1+a_n\to1$ だから級數 $\sum\left|\dfrac{a_n}{1+a_n}\right|$ はまた收斂である．よっていま證明したことから積

$$\prod_{m=1}^{n}\left(1-\frac{a_m}{1+a_m}\right)$$

は收斂する．しかしこの積は $\dfrac{1}{p_n}$ に等しいから $p_n$ の極限は 0 ではあり得ないのである．

次に $\{u_n(z)\}$ が領域 $D$ に於て定義されたとき無限積 $\prod_{n=1}^{\infty}\{1+u_n(z)\}$ はもし部分積

$$p_n(z)\equiv\prod_{m=1}^{n}\{1+u_m(z)\}$$

が $D$ に於て廣義一様に $D$ で決して 0 とならない函數 $f(z)$ に收斂するならば $D$ に於て廣義一様に收斂するという．そのための最も簡單な判定法は

**定理 11.** 無限積 $\Pi\{1+u_n(z)\}$ は級數 $\sum|u_n(z)|$ が領域 $D$ に於て廣義一様收斂ならば $D$ に於て廣義一様收斂する．

［證明］ $D$ に含まれる任意の有界閉集合を $S$ とし $S$ に於ける $\sum|u_n(z)|$ の上端を $M$ とすれば

$$\{1+|u_1(z)|\}\cdots\cdots\{1+|u_n(z)|\}\leqq e^{|u_1(z)|+\cdots}\leqq e^M$$

が成立つ．

$$P_n(z)=\prod_{m=1}^{n}\{1+|u_m(z)|\}$$

とおくと

$$P_n(z)-P_{n-1}(z)=\{1+|u_1(z)|\}\cdots\cdots\{1+|u_{n-1}(z)|\}|u_n(z)|\leqq e^M|u_n(z)|$$

が成立つから $S$ に於て級數 $\sum\{P_n(z)-P_{n-1}(z)\}$ は一様收斂し定理の結果は上に用いたばかりの論法で從う．

# 附　　録 II

## Salzer の 複素直坐標式補間法の係數 $A_k$ の表

$$f(z)=f(z_0+Ph)=\sum a_k f_k/\sum a_k, \qquad P=p+iq,$$

$$a_k=\frac{A_k}{z-z_k}, \qquad A_k=\frac{1}{(z_k-z_1)\cdots\cdots(z_k-z_{k-1})(z_k-z_{k+1})\cdots\cdots(z_k-z_n)}$$

### Three-Point Interpolation (Quadratic)

| Configuration | Coefficients |
|---|---|
| $i$<br>$0 \quad 1$ | $A_0=-i,\quad A_1=\frac{1}{2}(1+i),\quad A_i=\frac{1}{2}(-1+i).$ |

### Four-Point Interpolation (Cubic)

| Configuration | Coefficients |
|---|---|
| $i \quad 1+i$<br>$0 \quad 1$ | $A_0=\frac{1}{2}(1+i),\quad A_1=\frac{1}{2}(-1+i),\quad A_i=\frac{1}{2}(1-i),\quad A_{1+i}=\frac{1}{2}(-1-i).$ |

### Five-Point Interpolation (Quartic)

| Configulation | Coefficients |
|---|---|
| $i \quad 1+i$<br>$0 \quad 1 \quad 2$ | $\begin{cases} A_0=\frac{1}{4}(-1-i),\quad A_1=\frac{1}{2}(1-i),\quad A_2=\frac{1}{20}(1+3i), \\ A_i=\frac{1}{10}(-3+i),\quad A_{1+i}=\frac{1}{2}i. \end{cases}$ |
| $i \quad 1+i \quad 2+i$<br>$0 \quad 1$ | $\begin{cases} A_0=\frac{1}{10}(-3-i),\quad A_1=-\frac{1}{2}i,\quad A_i=\frac{1}{4}(-1+i),\quad A_{1+i}=\frac{1}{2}(1+i), \\ A_{2+i}=\frac{1}{20}(1-3i). \end{cases}$ |
| $\qquad\qquad 2+2i$<br>$i \quad 1+i$<br>$0 \quad 1$ | $\begin{cases} A_0=-\frac{1}{4},\quad A_1=\frac{1}{10}(-1-3i),\quad A_i=\frac{1}{10}(-1+3i),\quad A_{1+i}=\frac{1}{2}, \\ A_{2+2i}=-\frac{1}{20}. \end{cases}$ |

## Six-Point Interpolation (Quintic)

Configulation | Coefficients

$2i$
$i$ $1+i$
$0$ $1$ $2$

$$\begin{cases} A_0=\frac{1}{8}(1-i), & A_1=\frac{1}{10}(3+i), \quad A_2=\frac{1}{40}(-1+2i), \\ A_i=\frac{1}{10}(-1-3i), & A_{1+i}=\frac{1}{4}(-1+i), \quad A_{2i}=\frac{1}{40}(-2+i). \end{cases}$$

$i$ $1+i$ $2+i$
$0$ $1$ $2$

$$\begin{cases} A_0=\frac{1}{20}(3+i), \quad A_1=\frac{1}{2}i, \quad A_2=\frac{1}{20}(-3+i), \quad A_i=\frac{1}{20}(3-i), \\ A_{1+i}=-\frac{1}{2}i, \quad A_{2+i}=\frac{1}{20}(-3-i). \end{cases}$$

$i$ $1+i$
$-1$ $0$ $1$ $2$

$$\begin{cases} A_{-1}=\frac{1}{60}(-1+3i), & A_0=\frac{1}{4}(-1-i), \quad A_1=\frac{1}{4}(1-i), \\ A_2=\frac{1}{60}(1+3i), & A_i=\frac{1}{10}(-1+2i), \quad A_{1+i}=\frac{1}{10}(1+2i). \end{cases}$$

$-1+i$ $i$ $1+i$
$0$ $1$ $2$

$$\begin{cases} A_0=-\frac{1}{4}i, \quad A_1=\frac{1}{10}(3-i), \quad A_2=\frac{1}{20}i, \quad A_{-1+i}=-\frac{1}{20}i, \quad A_i=\frac{1}{10}(-3+i), \\ A_{1+i}=\frac{1}{4}i. \end{cases}$$

## Seven-Point Interpolation (Sextic)

Configulation | Coefficients

$2i$
$i$ $1+i$ $2+i$
$0$ $1$ $2$

$$\begin{cases} A_0=\frac{1}{40}(-1+3i), \quad A_1=\frac{1}{10}(-2+i), \quad A_2=\frac{1}{40}(-2-i), \\ A_i=\frac{1}{20}(1+3i), \quad A_{1+i}=\frac{1}{4}(1-i), \quad A_{2+i}=\frac{1}{20}(-1-i), \quad A_{2i}=\frac{1}{40}. \end{cases}$$

$2i$ $2+2i$
$i$ $1+i$
$0$ $1$ $2$

$$\begin{cases} A_0=\frac{1}{16}i, \quad A_1=\frac{1}{10}(-1+i), \quad A_2=\frac{1}{80}(-2-i), \quad A_i=\frac{1}{10}(1+i), \\ A_{1+i}=-\frac{1}{4}i, \quad A_{2i}=\frac{1}{80}(2-i), \quad A_{2+2i}=\frac{1}{80}i. \end{cases}$$

$2i$
$i$ $1+i$
$-1$ $0$ $1$ $2$

$$\begin{cases} A_{-1}=\frac{1}{60}(-1-i), \quad A_0=\frac{1}{8}(1-i), \quad A_1=\frac{1}{20}(3+i), \\ A_2=\frac{1}{120}(-1+2i), \quad A_i=\frac{1}{10}(-2-i), \quad A_{1+i}=\frac{1}{20}(-1+3i), \\ A_{2i}=\frac{1}{40}i. \end{cases}$$

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | $i$ | $1+i$ | $2+i$ | $\begin{cases} A_{-1}=-\frac{1}{60}i, \quad A_0=\frac{1}{20}(3+i), \quad A_1=\frac{1}{4}i, \quad A_2=\frac{1}{60}(-3+i), \\ A_i=\frac{1}{20}(1-2i), \quad A_{1+i}=\frac{1}{10}(-1-2i), \quad A_{2+i}=-\frac{1}{20}. \end{cases}$ |
| $-1$ | $0$ | $1$ | $2$ | |

## Eight-Point Interpolation (Septic)

Configuration

Coefficients

| | | | |
|---|---|---|---|
| $2i$ | $1+2i$ | | $\begin{cases} A_0=\frac{1}{40}(-1-i), \quad A_1=\frac{1}{20}(-1-2i), \quad A_2=-\frac{1}{40}i, \quad A_i=\frac{1}{20}(-2-i), \\ A_{1+i}=\frac{1}{4}(1+i), \quad A_{2+i}=-\frac{1}{20}i, \quad A_{2i}=-\frac{1}{40}, \quad A_{1+2i}=-\frac{1}{20}. \end{cases}$ |
| $i$ | $1+i$ | $2+i$ | |
| $0$ | $1$ | $2$ | |

| | | | |
|---|---|---|---|
| $2i$ | | $2+2i$ | $\begin{cases} A_0=\frac{1}{80}(-1-2i), \quad A_1=-\frac{1}{10}i, \quad A_2=\frac{1}{80}(1-2i), \quad A_i=\frac{1}{20}(-1-i), \\ A_{1+i}=\frac{1}{4}i, \quad A_{2+i}=\frac{1}{20}(1-i), \quad A_{2i}=-\frac{1}{80}, \quad A_{2+2i}=\frac{1}{80}. \end{cases}$ |
| $i$ | $1+i$ | $2+i$ | |
| $0$ | $1$ | $2$ | |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $-1+i$ | $i$ | $1+i$ | $2+i$ | $\begin{cases} A_{-1}=\frac{1}{60}, \quad A_0=\frac{1}{20}(1+2i), \quad A_1=\frac{1}{20}(-1+2i), \quad A_2=-\frac{1}{60}, \\ A_{-1+i}=\frac{1}{60}, \quad A_i=\frac{1}{20}(1-2i), \quad A_{1+i}=\frac{1}{20}(-1-2i), \quad A_{2+i}=-\frac{1}{60}. \end{cases}$ |
| $-1$ | $0$ | $1$ | $2$ | |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | $i$ | $1+i$ | | $\begin{cases} A_{-i}=\frac{1}{20}i, \quad A_{1-i}=\frac{1}{20}i, \quad A_{-1}=-\frac{1}{60}, \quad A_0=\frac{1}{4}, \quad A_1=-\frac{1}{4}, \\ A_2=\frac{1}{60}, \quad A_i=-\frac{1}{20}i, \quad A_{1+i}=-\frac{1}{20}i. \end{cases}$ |
| $-1$ | $0$ | $1$ | $2$ | |
| | $-i$ | $1-i$ | | |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $-1+2i$ | | | $2+2i$ | $\begin{cases} A_{-1-i}=\frac{1}{1080}(-1-i), \quad A_{2-i}=\frac{1}{1080}(1-i), \quad A_0=\frac{1}{40}(1+i), \\ A_1=\frac{1}{40}(-1+i), \quad A_i=\frac{1}{40}(1-i), \quad A_{1+i}=\frac{1}{40}(-1-i), \\ A_{-1+2i}=\frac{1}{1080}(-1+i), \quad A_{2+2i}=\frac{1}{1080}(1+i). \end{cases}$ |
| | $i$ | $1+i$ | | |
| | $0$ | $1$ | | |
| $-1-i$ | | | $2-i$ | |

## Nine-Point Interpolation (Octic)

Configulation

Coefficients

| | | | |
|---|---|---|---|
| $2i$ | $1+2i$ | $2+2i$ | $\begin{cases} A_0=\frac{1}{80}, \quad A_1=\frac{1}{20}, \quad A_2=\frac{1}{80}, \quad A_i=\frac{1}{20}, \quad A_{1+i}=-\frac{1}{4}, \\ A_{2+i}=\frac{1}{20}, \quad A_{2i}=\frac{1}{80}, \quad A_{1+2i}=\frac{1}{20}, \quad A_{2+2i}=\frac{1}{80}. \end{cases}$ |
| $i$ | $1+i$ | $2+i$ | |
| $0$ | $1$ | $2$ | |

$$\begin{array}{llll} \dot{2i} & 1\dot{+}2i & & \\ \dot{i} & 1\dot{+}i & 2\dot{+}i & \\ \dot{0} & \dot{1} & \dot{2} & \dot{3} \end{array} \quad \begin{cases} A_0=\frac{1}{120}(1+i), & A_1=\frac{1}{40}(1+2i), & A_2=\frac{1}{40}i, \\ A_3=\frac{1}{3120}(-5+i), & A_i=\frac{1}{40}(1+i), & A_{1+i}=\frac{1}{20}(-1-3i), \\ A_{2+i}=\frac{1}{40}(-1+i), & A_{2i}=\frac{1}{520}(3+2i), & A_{1+2i}=\frac{1}{80}(1+i). \end{cases}$$

$$\begin{array}{llll} & \dot{2i} & & \\ -1\dot{+}i & \dot{i} & 1\dot{+}i & 2\dot{+}i \\ \dot{-1} & \dot{0} & \dot{1} & \dot{2} \end{array} \quad \begin{cases} A_{-1}=\frac{1}{300}(-1+2i), & A_0=\frac{1}{40}(-2+i), & A_1=-\frac{1}{20}, \\ A_2=\frac{1}{240}(-1-i), & A_{-1+i}=\frac{1}{120}(-1+i), & A_i=\frac{1}{20}(2+i), \\ A_{1+i}=\frac{1}{40}(1-3i), & A_{2+i}=\frac{1}{300}(-2-i), & A_{2i}=\frac{1}{400}(-1-3i). \end{cases}$$

$$\begin{array}{llll} & \dot{3i} & & \\ & \dot{2i} & 1\dot{+}2i & \\ & \dot{i} & 1\dot{+}i & \\ \dot{-1} & \dot{0} & \dot{1} & \dot{2} \end{array} \quad \begin{cases} A_{-1}=\frac{1}{1200}(-1+3i), & A_0=\frac{1}{120}(-3+i), & A_1=-\frac{1}{40}, \\ A_2=\frac{1}{1560}(-2-3i), & A_i=\frac{1}{40}(1+3i), & A_{1+i}=\frac{1}{100}(-1-7i), \\ A_{2i}=\frac{1}{40}, & A_{1+2i}=\frac{1}{80}(1-i), & A_{2i}=\frac{1}{7800}(-3-11i). \end{cases}$$

$$\begin{array}{llll} & \dot{2i} & & \\ & \dot{i} & 1\dot{+}i & \\ \dot{-1} & \dot{0} & \dot{1} & \dot{2} \\ & \dot{-i} & 1\dot{-}i & \end{array} \quad \begin{cases} A_{-1}=-\frac{1}{60}, & A_{1-i}=\frac{1}{200}(-3+i), & A_{-1}=\frac{1}{300}(1-2i), \\ A_0=\frac{1}{8}i, & A_1=\frac{1}{20}(-1-2i), & A_2=\frac{1}{240}(1+i), \\ A_i=\frac{1}{20}, & A_{1+i}=\frac{1}{40}(1-i), & A_{2i}=\frac{1}{1200}(-1-3i). \end{cases}$$

# 雑　　　題

1. 次の函数の 0 から $x$ までの和を求めよ.

$$\frac{x^6+x^4+3}{(x+1)(x+2)(2x+3)}.$$

2. 證明せよ.

$$\Psi(z)=\ln z-\frac{1}{2z}-\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{2(z+n)+1}{2(z+n)(z+n+1)}-\ln\frac{z+n+1}{z+n}\right].$$

3. $g(z)=2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{z+n}$ のとき次式を證明せよ.

(i) $g(z)=\Psi\left(\frac{z+1}{2}\right)-\Psi(z)$,

(ii) $g(z)+g(1-z)=2\pi\ \mathrm{cosec}\ \pi z$,

(iii) $g(1)=2\ln 2,\qquad g\left(\frac{1}{2}\right)=\pi$,

(iv) $\frac{1}{n}\sum_{r=0}^{2n-1}(-1)^r\,\Psi\left(z+\frac{r}{2n}\right)=-g(2nz)$.

4. 本書の表により

(i) $z=5+2i,\ z=-5+2i,\ z=5-2i$ に對する $\Gamma(z)$ の値を求めよ.

(ii) $z=5.37+2.46i,\ z=-5.37-2.46i$ に對する $\ln|\Gamma(z)|$ 及び $\arc\Gamma(z)$ を求めよ.

(iii) $z=13+5i,\ z=-18+4i$ に對する $\ln|\Gamma(z)|$ 及び $\mathrm{arc}\,\Gamma(z)$ を求めよ.

5. 次式を導け.

$$\Psi'(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(z+n)^2},$$
$$=\frac{1}{z}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(z+n)^2(z+n+1)},$$
$$=\frac{1}{z}+\frac{1}{2z^2}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2(z+n)^2(z+n+1)^2}.$$

6. 證明せよ.

(i) $\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{2\pi}{\sqrt{3}}$,

(ii) $\frac{\Gamma'(1)}{\Gamma(1)}-\frac{\Gamma'\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}=2\ln 2$,

(iii) $\prod_{r=1}^{8}\Gamma\left(\frac{r}{3}\right)=\frac{640}{3^6}\left(\frac{\pi}{\sqrt{3}}\right)^3$.

7. $n$ が大のとき 次式を證明せよ.

$$\frac{3\cdot5\cdots\cdots(2n+1)}{2\cdot4\cdots\cdots2n}\sim\frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(2\sqrt{n}+\frac{3}{4\sqrt{n}}\right).$$

8. Wallis の公式 (14.6) から $n$ 大のとき次式を導け.

$$-1)^n\binom{-\frac{1}{2}}{n}\sim\frac{1}{\sqrt{\pi n}}.$$

9. 證明せよ.

$$(1-z)\left(1+\frac{z}{2}\right)\left(1-\frac{z}{3}\right)\left(1+\frac{z}{4}\right)\cdots\cdots=\frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(1+\frac{z}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}-\frac{z}{2}\right)}.$$

10. 證明せよ. $x>0$ のとき

$$\frac{\Gamma(x)\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(x+\frac{1}{2}\right)}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2n\,!}{2^{2n}(n\,!)^2}\cdot\frac{1}{x+n}.$$

11. 證明せよ. $a>0$ のとき

$$\frac{\Gamma(z)\,\Gamma(a+1)}{\Gamma(z+a)}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n a(a-1)(a-2)\cdots\cdots(a-n)}{n\,!}\cdot\frac{1}{z+n}.$$

12. 證明せよ.

(i) $\alpha>0,\ \beta>0$ のとき

$$\int_y^x (x-t)^{\alpha-1}(t-y)^{\beta-1}dt=\frac{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}(x-y)^{\alpha+\beta-1}.$$

(ii) $\alpha>0,\ \beta>0$ で, $\lambda<y$ または $\lambda>x$ のとき

$$\int_y^x \frac{(x-t)^{\alpha-1}(t-y)^{\beta-1}}{|t-\lambda|^{\alpha+\beta}}dt=\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}\cdot\frac{(x-y)^{\alpha+\beta-1}}{|x-\lambda|^{\beta}\,|y-\lambda|^{\alpha}}.$$

13. 證明せよ. $\alpha>0,\ \beta>0$ のとき

(i) $$\int_0^1\frac{t^{\alpha-1}}{1+t}dt=\frac{1}{2}\Psi\left(\frac{1}{2}+\frac{\alpha}{2}\right)-\frac{1}{2}\Psi\left(\frac{\alpha}{2}\right),$$

(ii) $$\int_0^1\frac{t^{\alpha-1}-t^{\beta-1}}{(1+t)\ln t}dt=\ln\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{\alpha}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\beta}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{\beta}{2}\right)}.$$

14. 證明せよ

(i) $a>0,\ a+b>0$ ならば

$$\int_0^1\frac{x^{a-1}(1-x^b)}{1-x}dx=\lim_{\delta\to 0}\left\{\frac{\Gamma(a)\Gamma(\delta)}{\Gamma(a+\delta)}-\frac{\Gamma(a+b)\Gamma(\delta)}{\Gamma(a+b+\delta)}\right\}=\Psi(a+b)-\Psi(a).$$

(ii) $a>0,\ a+b>0,\ a+c>0,\ a+b+c>0$ ならば

$$\int_0^1\frac{x^{a-1}(1-x^b)(1-x^c)}{(1-x)(-\ln x)}dx=\ln\frac{\Gamma(a)\,\Gamma(a+b+c)}{\Gamma(a+b)\,\Gamma(a+c)}.$$

15. 置換 $\cos\theta=1-2\tan(\varphi/2)$ によって次式を證明せよ.

$$\int_0^{\pi}\frac{d\theta}{\sqrt{3-\cos\theta}}=\frac{\left\{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\right\}^2}{4\sqrt{\pi}}.$$

16. $\alpha$ が偶數でなければ實數値で $t\to\infty$ のとき次式を證明せよ.

$$\int_0^{\infty}e^{-x^{\alpha}}\cos xt\,dx\sim\frac{\Gamma(\alpha+1)\sin\frac{1}{2}\pi\alpha}{t^{\alpha+1}}.$$

17. $z$ の函數

$$F_{\alpha}(z)=\int_0^{\infty}e^{-t^{\alpha}}\cos zt\,dt\quad(\alpha>1)$$

は

$$\frac{1}{\alpha}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}\Gamma\left(\frac{2n+1}{\alpha}\right)z^{2n}$$

と展開されることを示し，これより $F_\alpha(z)$ が種数 $\rho=\dfrac{\alpha}{\alpha-1}$ なる整函数なることを證明せよ．特に $\alpha=2$ のときは

$$F_2(z)=\frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-\frac{1}{4}z^2}$$

である．

18.
$$U=2^{\frac{1}{2}x}/\Gamma\left(1-\frac{x}{2}\right),\quad V=2^{\frac{1}{2}x}\Gamma\left(\frac{1}{2}-\frac{x}{2}\right)$$

とおき

$$F(x)=\sqrt{\pi}\left(V\frac{dU}{dx}-U\frac{dV}{dx}\right)$$

と定義するとき次式を證明せよ．

(i) $F(x+1)=xF(x)+\dfrac{1}{\Gamma(1-x)}$,

(ii) $F(n)=\Gamma(n)$, $(n=1,2,\cdots\cdot)$,

(iii) $F(x)=\dfrac{1}{\Gamma(1-x)}\dfrac{d}{dx}\ln\dfrac{\Gamma\left(\frac{1-x}{2}\right)}{\Gamma\left(1-\frac{x}{2}\right)}$,

(iv) $F(x)$ は $x$ の整函数である．

19.
$$G(z+1)=(2\pi)^{\frac{1}{2}z}e^{-\frac{1}{2}z(z+1)-\frac{1}{2}Cz^2}\prod_{n=1}^{\infty}\left\{\left(1+\frac{z}{n}\right)^n e^{-z+z^2/(2n)}\right\}$$

で定義される函数 $G(z)$ について證明せよ．

(i) $G(z)$ は整函数である．

(ii) $G(z+1)=\Gamma(z)G(z)$, $G(1)=1$,

(iii) $\dfrac{(n!)^n}{G(n+1)}=1^1\cdot2^2\cdot3^3\cdot\cdots\cdot n^n$.

20.
$$\frac{G'(z+1)}{G(z+1)}=\frac{1}{2}\ln 2\pi+\frac{1}{2}-z+z\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}$$

を證明し，これより次式を導け．

$$\ln\frac{G(1-z)}{G(1+z)}=\int_0^z \pi z\cot\pi z dz-z\ln 2\pi.$$

21. 證明せよ．

$$\int_0^z \ln\Gamma(t+1)dt=\frac{1}{2}z\ln 2\pi-\frac{1}{2}z(z+1)+z\ln\Gamma(z+1)-\ln G(z+1).$$

# 小数6位まで有効な複素變數のガンマ函數表

## A TABLE OF THE GAMMA FUNCTION FOR COMPLEX ARGUMENTS SIGNIFICANT TO THE SIXTH DECIMAL PLACE

$\ln \Gamma(x+iy)=u+iv$

## PART I

$u=\ln|\Gamma(x+iy)|=\Re \ln \Gamma(z)$

$x=-10.0(0.2)-6.0,\ -6.0(0.1)+10.4$

$y=0.0(0.1)2.0,\qquad 2.0(0.2)10.0$

| y | −10.0 | −9.8 | −9.6 |
|---|---|---|---|
| 10.0 | -40.463340 | -39.929508 | -39.397675 |
| 9.8 | -39.986179 | -39.454267 | -38.924393 |
| 9.6 | -39.506981 | -38.976986 | -38.449070 |
| 9.4 | -39.025707 | -38.497627 | -37.971665 |
| 9.2 | -38.542318 | -38.016148 | -37.492138 |
| 9.0 | -38.056774 | -37.532508 | -37.010445 |
| 8.8 | -37.569032 | -37.046666 | -36.526544 |
| 8.6 | -37.079052 | -36.558577 | -36.040391 |
| 8.4 | -36.586791 | -36.068200 | -35.551941 |
| 8.2 | -36.092207 | -35.575489 | -35.061149 |
| 8.0 | -35.595256 | -35.080401 | -34.507970 |
| 7.8 | -35.095894 | -34.582890 | -34.0[illegible]2356 |
| 7.6 | -34.594076 | -34.082911 | -33.574260 |
| 7.4 | -34.089758 | -33.580416 | -33.073636 |
| 7.2 | -33.582895 | -33.075360 | -32.570434 |
| 7.0 | -33.073440 | -32.567694 | -32.064605 |
| 6.8 | -32.561347 | -32.057371 | -31.556101 |
| 6.6 | -32.046570 | -31.544344 | -31.044870 |
| 6.4 | -31.529062 | -31.028563 | -30.530865 |
| 6.2 | -31.008776 | -30.509980 | -30.014033 |
| 6.0 | -30.485666 | -29.988546 | -29.494325 |
| 5.8 | -29.959684 | -29.464212 | -28.971690 |
| 5.6 | -29.430783 | -28.936931 | -28.446076 |
| 5.4 | -28.898917 | -28.406652 | -27.917433 |
| 5.2 | -28.364038 | -27.873327 | -27.385710 |
| 5.0 | -27.826100 | -27.336908 | -26.850857 |
| 4.8 | -27.285058 | -26.797346 | -26.312824 |
| 4.6 | -26.740865 | -26.254594 | -25.771561 |
| 4.4 | -26.193477 | -25.708606 | -25.227018 |
| 4.2 | -25.642849 | -25.159334 | -24.679148 |
| 4.0 | -25.088938 | -24.606733 | -24.127902 |
| 3.8 | -24.531702 | -24.050759 | -23.573234 |
| 3.6 | -23.971098 | -23.491368 | -23.015098 |
| 3.4 | -23.407088 | -22.928518 | -22.453449 |
| 3.2 | -22.839630 | -22.362168 | -21.888245 |
| 3.0 | -22.268689 | -21.792278 | -21.319444 |
| 2.8 | -21.694228 | -21.2[illegible]9809 | -20.747005 |
| 2.6 | -21.116212 | -20.641727 | -20.170891 |
| 2.4 | -20.534608 | -20.060996 | -19.591065 |
| 2.2 | -19.949386 | -19.476583 | -19.007493 |
| 2.0 | -19.360515 | -18.888459 | -18.420144 |
| 1.9 | -19.064702 | -18.592995 | -18.125045 |
| 1.8 | -18.767964 | -18.296592 | -17.828992 |
| 1.7 | -18.470297 | -17.999247 | -17.531985 |
| 1.6 | -18.171693 | -17.700954 | -17.234021 |
| 1.5 | -17.872142 | -17.401708 | -16.935109 |
| 1.4 | -17.571624 | -17.101502 | -16.635254 |
| 1.3 | -17.270110 | -16.800326 | -16.334479 |
| 1.2 | -16.967543 | -16.498156 | -16.032824 |
| 1.1 | -16.663820 | -16.194964 | -15.730369 |
| 1.0 | -16.358747 | -15.890687 | -15.427265 |
| 0.9 | -16.051967 | -15.585218 | -15.123795 |
| 0.8 | -15.742803 | -15.278352 | -14.820498 |
| 0.7 | -15.429976 | -14.969727 | -14.518369 |
| 0.6 | -15.111098 | -14.658698 | -14.219273 |
| 0.5 | -14.781265 | -14.344198 | -13.926646 |
| 0.4 | -14.431089 | -14.024741 | -13.646743 |
| 0.3 | -14.040050 | -13.699506 | -13.390581 |
| 0.2 | -13.558024 | -13.374626 | -13.176268 |
| 0.1 | -12.817747 | -13.088697 | -13.029435 |
| 0.0 | $+\infty$ | -12.959854 | -12.976512 |

$$u=\ln|\Gamma(x+iy)|=\Re\ln\Gamma(z)$$

$\longrightarrow x$

| −9.4 | −9.2 | −9.0 | −8.8 | −8.6 | −8.4 | −8.2 | $y$ ↑ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| -38.867844 | -38.340012 | -37.814181 | -37.290349 | -36.768511 | -36.248666 | -35.730808 | 10.0 |
| -38.396560 | -37.870769 | -37.347020 | -36.825311 | -36.305641 | -35.788007 | -35.272405 | 9.8 |
| -37.923236 | -37.399484 | -36.877817 | -36.358234 | -35.840734 | -35.325315 | -34.811975 | 9.6 |
| -37.447828 | -36.926115 | -36.406530 | -35.889073 | -35.373745 | -34.860545 | -34.349469 | 9.4 |
| -36.970294 | -36.450618 | -35.933114 | -35.417784 | -34.904628 | -34.393649 | -33.884841 | 9.2 |
| -36.490591 | -35.972950 | -35.457525 | -34.944321 | -34.433337 | -33.924578 | -33.418041 | 9.0 |
| -36.008676 | -35.493064 | -34.979716 | -34.468635 | -33.959823 | -33.453285 | -32.949019 | 8.8 |
| -35.524502 | -35.010915 | -34.499639 | -33.990678 | -33.484036 | -32.979717 | -32.477723 | 8.6 |
| -35.038025 | -34.526457 | -34.017248 | -33.510402 | -33.005925 | -32.503824 | -32.004100 | 8.4 |
| -34.549197 | -34.039642 | -33.532492 | -33.027756 | -32.525441 | -32.025553 | -31.528096 | 3.2 |
| -34.057973 | -33.550420 | -33.045323 | -32.542689 | -32.042529 | -31.544850 | -31.049656 | 8.0 |
| -33.564303 | -33.058743 | -32.555689 | -32.055150 | -31.557137 | -31.061659 | -30.568724 | 7.8 |
| -33.068140 | -32.564561 | -32.063539 | -31.565084 | -31.069210 | -30.575926 | -30.085241 | 7.6 |
| -32.569434 | -32.067823 | -31.568821 | -31.072439 | -30.578692 | -30.087592 | -29.599150 | 7.4 |
| -32.068135 | -31.568478 | -31.071481 | -30.577159 | -30.085527 | -29.596600 | -29.110389 | 7.2 |
| -31.564192 | -31.066473 | -30.571467 | -30.079189 | -29.589658 | -29.102890 | -28.618899 | 7.0 |
| -31.057556 | -30.561757 | -30.068722 | -29.578473 | -29.091026 | -28.606402 | -28.124616 | 6.8 |
| -30.548174 | -30.054274 | -29.563193 | -29.074953 | -28.589573 | -28.107076 | -27.627478 | 6.6 |
| -30.035994 | -29.543972 | -29.054824 | -28.568572 | -28.085239 | -27.604849 | -27.127421 | 6.4 |
| -29.520964 | -29.030797 | -28.543558 | -28.059272 | -27.577964 | -27.099659 | -26.624380 | 6.2 |
| -29.003032 | -28.514694 | -28.029339 | -27.546993 | -27.067685 | -26.591442 | -26.118289 | 6.0 |
| -28.482145 | -27.995608 | -27.512109 | -27.031678 | -26.554343 | -26.080134 | -25.609081 | 5.8 |
| -27.958249 | -27.473485 | -26.991812 | -26.513265 | -26.037874 | -25.565672 | -25.096690 | 5.6 |
| -27.431293 | -26.948268 | -26.468391 | -25.991695 | -25.518217 | -25.047989 | -24.581047 | 5.4 |
| -26.901224 | -26.419904 | -25.941787 | -25.466910 | -24.995309 | -24.527021 | -24.062085 | 5.2 |
| -26.367987 | -25.888336 | -25.411943 | -24.938847 | -24.469087 | -24.002703 | -23.539735 | 5.0 |
| -25.831532 | -25.353511 | -24.878803 | -24.407448 | -23.939489 | -23.474969 | -23.013929 | 4.8 |
| -25.291806 | -24.815374 | -24.342309 | -23.872653 | -23.406453 | -22.943753 | -22.484599 | 4.6 |
| -24.748758 | -24.273872 | -23.802405 | -23.334404 | -22.869916 | -22.408990 | -21.951676 | 4.4 |
| -24.202337 | -23.728950 | -23.259034 | -22.792640 | -22.329818 | -21.870617 | -21.415093 | 4.2 |
| -23.652493 | -23.180556 | -22.712143 | -22.247305 | -21.786096 | -21.328570 | -20.874781 | 4.0 |
| -23.099177 | -22.628640 | -22.161676 | -21.698342 | -21.238692 | -20.782784 | -20.330676 | 3.8 |
| -22.542340 | -22.073149 | -21.607581 | -21.145694 | -20.687547 | -20.233198 | -19.782710 | 3.6 |
| -21.981936 | -21.514036 | -21.049806 | -20.589308 | -20.132602 | -19.679751 | -19.230821 | 3.4 |
| -21.417920 | -20.951252 | -20.488301 | -20.029129 | -19.573802 | -19.122384 | -18.674945 | 3.2 |
| -20.850248 | -20.384751 | -19.923015 | -19.465107 | -19.011092 | -18.561040 | -18.115022 | 3.0 |
| -20.278877 | -19.814488 | -19.353903 | -18.897191 | -18.444420 | -17.995662 | -17.550992 | 2.8 |
| -19.703767 | -19.240421 | -18.780920 | -18.325334 | -17.873735 | -17.426198 | -16.982798 | 2.6 |
| -19.124880 | -18.662510 | -18.204022 | -17.749491 | -17.298989 | -16.852595 | -16.410388 | 2.4 |
| -18.542180 | -18.080714 | -17.623168 | -17.169617 | -16.720137 | -16.274806 | -15.833707 | 2.2 |
| -17.955634 | -17.495000 | -17.038320 | -16.585674 | -16.137137 | -15.692787 | -15.252708 | 2.0 |
| -17.660910 | -17.200661 | -16.744385 | -16.292163 | -15.844070 | -15.400178 | -14.960575 | 1.9 |
| -17.365214 | -16.905331 | -16.449436 | -15.997620 | -15.549953 | -15.106498 | -14.667345 | 1.8 |
| -17.068545 | -16.609002 | -16.153467 | -15.702040 | -15.254783 | -14.811743 | -14.373011 | 1.7 |
| -16.770904 | -16.311671 | -15.856469 | -15.405418 | -14.958559 | -14.515914 | -14.077569 | 1.6 |
| -16.472292 | -16.013332 | -15.558431 | -15.107747 | -14.661285 | -14.219010 | -13.781011 | 1.5 |
| -16.172722 | -15.713977 | -15.259334 | -14.809018 | -14.362969 | -13.921042 | -13.483327 | 1.4 |
| -15.872210 | -15.413592 | -14.959146 | -14.509222 | -14.063630 | -13.622028 | -13.184503 | 1.3 |
| -15.570801 | -15.112163 | -14.657809 | -14.208332 | -13.763309 | -13.322009 | -12.884524 | 1.2 |
| -15.268572 | -14.809650 | -14.355221 | -13.906321 | -13.462084 | -13.021062 | -12.583350 | 1.1 |
| -14.965675 | -14.505996 | -14.051187 | -13.603126 | -13.160105 | -12.719339 | -12.280920 | 1.0 |
| -14.662395 | -14.201089 | -13.745348 | -13.298636 | -12.857657 | -12.417123 | -11.977123 | 0.9 |
| -14 359264 | -13.894730 | -13.437028 | -12.992649 | -12.555274 | -12.114946 | -11.671760 | 0.8 |
| -14.057285 | -13.586552 | -13.124947 | -12.684800 | -12.253955 | -11.813810 | -11.364462 | 0.7 |
| -13.758317 | -13.275911 | -12.806716 | -12.374445 | -11.955560 | -11.515575 | -11.054585 | 0.6 |
| -13.465800 | -12.961740 | -12.477432 | -12.060516 | -11.663528 | -11.223678 | -10.741061 | 0.5 |
| -13.185987 | -12.642551 | -12.127705 | -11.741526 | -11.384112 | -10.944373 | -10.422403 | 0.4 |
| -12.929894 | -12.317525 | -11.737016 | -11.416655 | -11.128330 | -10.688675 | -10.097790 | 0.3 |
| -12.715630 | -11.992796 | -11.255239 | -11.092036 | -10.914288 | -10.474694 | - 9.773356 | 0.2 |
| -12.568829 | -11.706957 | -10.515112 | -10.806263 | -10.767618 | -10.328063 | - 9.487695 | 0.1 |
| -12.515915 | -11.578143 | +∞ | -10.677472 | -10.714748 | -10.275205 | - 9.358940 | 0.0 |

$$u=\ln|\Gamma(x+iy)|=\Re\ln\Gamma(z)$$

$\longrightarrow x$

| $y$ | −8.0 | −7.8 | −7.6 | −7.4 | −7.2 | −7.0 | −6.8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 10.0 | -35.214933 | -34.701032 | -34.189098 | -33.679123 | -33.171093 | -32.665000 | -32.160827 |
| 9.8 | -34.758832 | -34.247280 | -33.737742 | -33.230209 | -32.724672 | -32.221120 | -31.719539 |
| 9.6 | -34.300709 | -33.791512 | -33.284378 | -32.779299 | -32.276266 | -31.775268 | -31.276293 |
| 9.4 | -33.840517 | -33.333682 | -32.828960 | -32.326344 | -31.825825 | -31.327394 | -30.831038 |
| 9.2 | -33.378206 | -32.873739 | -32.371436 | -31.871291 | -31.373296 | -30.877442 | -30.383720 |
| 9.0 | -32.913727 | -32.411633 | -31.911754 | -31.414087 | -30.918625 | -30.425360 | -29.934283 |
| 8.8 | -32.447028 | -31.947309 | -31.449860 | -30.954678 | -30.461757 | -29.971090 | -29.482669 |
| 8.6 | -31.978056 | -31.480715 | -30.985700 | -30.493008 | -30.002634 | -29.514574 | -29.028819 |
| 8.4 | -31.506757 | -31.011796 | -30.519216 | -30.029019 | -29.541198 | -29.055752 | -28.572673 |
| 8.2 | -31.033076 | -30.540494 | -30.050352 | -29.562651 | -29.077389 | -28.594562 | -28.114166 |
| 8.0 | -30.556956 | -30.066752 | -29.579047 | -29.093845 | -28.611143 | -28.130941 | -27.653235 |
| 7.8 | -30.078339 | -29.590510 | -29.105241 | -28.622536 | -28.142397 | -27.664822 | -27.189812 |
| 7.6 | -29.597166 | -29.111707 | -28.628870 | -28.148662 | -27.671085 | -27.196140 | -26.723829 |
| 7.4 | -29.113376 | -28.630281 | -28.149872 | -27.672157 | -27.197139 | -26.724824 | -26.255213 |
| 7.2 | -28.626908 | -28.146169 | -27.668181 | -27.192952 | -26.720491 | -26.250803 | -25.783893 |
| 7.0 | -28.137699 | -27.659305 | -27.183729 | -26.710981 | -26.241070 | -25.774005 | -25.309793 |
| 6.8 | -27.645685 | -27.169624 | -26.696448 | -26.226171 | -25.758803 | -25.294355 | -24.832836 |
| 6.6 | -27.150800 | -26.677058 | -26.206269 | -25.738451 | -25.273615 | -24.811775 | -24.352943 |
| 6.4 | -26.652977 | -26.181538 | -25.713121 | -25.247747 | -24.785430 | -24.326188 | -23.870033 |
| 6.2 | -26.152151 | -25.682994 | -25.216932 | -24.753985 | -24.294172 | -23.837512 | -23.384022 |
| 6.0 | -25.648252 | -25.181356 | -24.717627 | -24.257088 | -23.799760 | -23.345667 | -22.894826 |
| 5.8 | -25.141211 | -24.676552 | -24.215133 | -23.756978 | -23.302115 | -22.850567 | -22.402358 |
| 5.6 | -24.630958 | -24.168509 | -23.709373 | -23.253577 | -22.801154 | -22.352129 | -21.906529 |
| 5.4 | -24.117424 | -23.657154 | -23.200271 | -22.746806 | -22.296794 | -21.850265 | -21.407249 |
| 5.2 | -23.600536 | -23.142412 | -22.687749 | -22.236583 | -21.788950 | -21.344887 | -20.904426 |
| 5.0 | -23.080224 | -22.624208 | -22.171729 | -21.722826 | -21.277538 | -20.835906 | -20.397966 |
| 4.8 | -22.556415 | -22.102469 | -21.652134 | -21.205453 | -20.762471 | -20.333231 | -19.887775 |
| 4.6 | -22.029039 | -21.577118 | -21.128883 | -20.684382 | -20.243663 | -19.806773 | -19.373758 |
| 4.4 | -21.498023 | -21.048080 | -20.601899 | -20.159530 | -19.721026 | -19.286438 | -18.855818 |
| 4.2 | -20.963296 | -20.515281 | -20.071102 | -19.630814 | -19.194474 | -18.762136 | -18.333859 |
| 4.0 | -20.424788 | -19.978645 | -19.536414 | -19.098151 | -18.663917 | -18.233774 | -17.807783 |
| 3.8 | -19.882427 | -19.438100 | -18.997756 | -18.561458 | -18.129271 | -17.701260 | -17.277493 |
| 3.6 | -19.336147 | -18.893572 | -18.455052 | -18.020655 | -17.590449 | -17.164504 | -16.742893 |
| 3.4 | -18.785878 | -18.344990 | -17.908227 | -17.475660 | -17.047364 | -16.623414 | -16.203887 |
| 3.2 | -18.231554 | -17.792282 | -17.357205 | -16.926396 | -16.499935 | -16.077902 | -15.660379 |
| 3.0 | -17.673111 | -17.235382 | -16.801913 | -16.372784 | -15.948079 | -15.527881 | -15.112278 |
| 2.8 | -17.110485 | -16.674221 | -16.242281 | -15.814750 | -15.391715 | -14.973264 | -14.559492 |
| 2.6 | -16.543617 | -16.108737 | -15.678242 | -15.252221 | -14.830766 | -14.413970 | -14.001933 |
| 2.4 | -15.972449 | -15.538867 | -15.109729 | -14.685127 | -14.265158 | -13.849919 | -13.439515 |
| 2.2 | -15.396926 | -14.964553 | -14.536681 | -14.113403 | -13.694818 | -13.281033 | -12.872156 |
| 2.0 | -14.816994 | -14.385740 | -13.959039 | -13.536985 | -13.119681 | -12.707240 | -12.299779 |
| 1.9 | -14.525359 | -14.094630 | -13.668479 | -13.246999 | -12.830292 | -12.418481 | -12.011685 |
| 1.8 | -14.232601 | -13.802375 | -13.376753 | -12.955819 | -12.539680 | -12.128467 | -11.722309 |
| 1.7 | -13.938714 | -13.508969 | -13.083855 | -12.663441 | -12.247836 | -11.837189 | -11.431641 |
| 1.6 | -13.643687 | -13.214405 | -12.789783 | -12.369863 | -11.954752 | -11.544635 | -11.139673 |
| 1.5 | -13.347507 | -12.918675 | -12.494539 | -12.075083 | -11.660419 | -11.250789 | -10.846394 |
| 1.4 | -13.050155 | -12.621769 | -12.198128 | -11.779111 | -11.364827 | -10.955630 | -10.551792 |
| 1.3 | -12.751596 | -12.323676 | -11.900571 | -11.481962 | -11.067958 | -10.659123 | -10.255852 |
| 1.2 | -12.451774 | -12.024368 | -11.601905 | -11.183675 | -10.769795 | -10.361207 | - 9.958548 |
| 1.1 | -12.150582 | -11.723817 | -11.302208 | -10.884329 | -10.470298 | -10.061776 | - 9.659847 |
| 1.0 | -11.847827 | -11.421959 | -11.001628 | -10.584070 | -10.169405 | - 9.760634 | - 9.359684 |
| 0.9 | -11.543148 | -11.118682 | -10.700448 | -10.283184 | - 9.867002 | - 9.457418 | - 9.057945 |
| 0.8 | -11.235868 | -10.813782 | -10.399204 | - 9.982199 | - 9.562890 | - 9.151451 | - 8.7544[illegible]6 |
| 0.7 | -10.924707 | -10.506894 | -10.098891 | - 9.682118 | - 9.256698 | - 8.841452 | - 8.448760 |
| 0.6 | -10.607175 | -10.197374 | - 9.801370 | - 9.384798 | - 8.947781 | - 8.525028 | - 8.140301 |
| 0.5 | -10.278666 | - 9.884153 | - 9.510079 | - 9.093678 | - 8.635072 | - 8.197275 | - 7.827979 |
| 0.4 | - 9.929493 | - 9.565743 | - 9.231270 | - 8.815008 | - 8.317081 | - 7.848803 | - 7.510306 |
| 0.3 | - 9.539236 | - 9.241322 | - 8.975960 | - 8.559806 | - 7.992987 | - 7.459091 | - 7.186460 |
| 0.2 | - 9.057768 | - 8.917026 | - 8.762256 | - 8.346179 | - 7.668925 | - 6.978014 | - 6.862573 |
| 0.1 | - 8.317826 | - 8.631446 | - 8.615788 | - 8.199760 | - 7.383486 | - 6.238306 | - 6.577240 |
| 0.0 | +∞ | - 8.502720 | - 8.562986 | - 8.146973 | - 7.254806 | +∞ | - 6.448596 |

$$u=\ln|\Gamma(x+iy)|=\Re\ln\Gamma(z)$$

$\longrightarrow x$

| −6.6 | −6.4 | −6.2 | −6.0 | −5.9 | −5.8 | −5.7 | $y$ ↑ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| -31.658561 | -31.158185 | -30.659679 | -30.163026 | -29.915387 | -29.668203 | -29.421470 | 10.0 |
| -31.219915 | -30.722231 | -30.226471 | -29.732615 | -29.486394 | -29.240641 | -28.995350 | 9.8 |
| -30.779328 | -30.284355 | -29.791360 | -29.300321 | -29.055529 | -28.811219 | -28.567386 | 9.6 |
| -30.336746 | -29.844502 | -29.354290 | -28.866091 | -28.622740 | -28.379884 | -28.137521 | 9.4 |
| -29.892116 | -29.402617 | -28.915207 | -28.429868 | -28.187969 | -27.946579 | -27.705698 | 9.2 |
| -29.445381 | -28.958643 | -28.474052 | -27.991593 | -27.751156 | -27.511245 | -27.271856 | 9.0 |
| -28.996483 | -28.512520 | -28.030766 | -27.551206 | -27.312242 | -27.073820 | -26.835936 | 8.8 |
| -28.545361 | -28.064188 | -27.585287 | -27.108644 | -26.871164 | -26.634241 | -26.397872 | 8.6 |
| -28.091953 | -27.613584 | -27.137551 | -26.663843 | -26.427855 | -26.192441 | -25.957600 | 8.4 |
| -27.636195 | -27.160641 | -26.687491 | -26.216773 | -25.982247 | -25.748353 | -25.515049 | 8.2 |
| -27.178021 | -26.705292 | -26.235038 | -25.767247 | -25.534271 | -25.301905 | -25.070148 | 8.0 |
| -26.717362 | -26.247468 | -25.780121 | -25.315310 | -25.083853 | -24.853024 | -24.622823 | 7.8 |
| -26.254148 | -25.787097 | -25.322666 | -24.860848 | -24.630917 | -24.401633 | -24.172997 | 7.6 |
| -25.788307 | -25.324103 | -24.862597 | -24.403784 | -24.175384 | -23.947653 | -23.720590 | 7.4 |
| -25.319762 | -24.858411 | -24.399837 | -23.944036 | -23.717174 | -23.491001 | -23.265518 | 7.2 |
| -24.848437 | -24.389940 | -23.934302 | -23.481522 | -23.256201 | -23.031593 | -22.807696 | 7.0 |
| -24.374252 | -23.918611 | -23.465911 | -23.016155 | -22.792379 | -22.569340 | -22.347033 | 6.8 |
| -23.897127 | -23.444337 | -22.994575 | -22.547847 | -22.325620 | -22.104150 | -21.883439 | 6.6 |
| -23.416977 | -22.967034 | -22.520207 | -22.076505 | -21.855827 | -21.635931 | -21.416817 | 6.4 |
| -22.933717 | -22.486611 | -22.042714 | -21.602036 | -21.382906 | -21.164583 | -20.947067 | 6.2 |
| -22.447258 | -22.002979 | -21.562002 | -21.124341 | -20.906757 | -20.690005 | -20.474087 | 6.0 |
| -21.957510 | -21.516042 | -21.077974 | -20.643320 | -20.427278 | -20.212095 | -19.997772 | 5.8 |
| -21.464381 | -21.025707 | -20.590530 | -20.158871 | -19.944365 | -19.730745 | -19.518013 | 5.6 |
| -20.967776 | -20.531874 | -20.099569 | -19.670886 | -19.457909 | -19.245845 | -19.034698 | 5.4 |
| -20.467601 | -20.034444 | -19.604987 | -19.179257 | -18.967798 | -18.757282 | -18.547710 | 5.2 |
| -19.963757 | -19.533315 | -19.106676 | -18.683873 | -18.473921 | -18.264939 | -18.056931 | 5.0 |
| -19.456145 | -19.028383 | -18.604528 | -18.184621 | -17.976159 | -17.768697 | -17.562240 | 4.8 |
| -18.944666 | -18.519542 | -18.098433 | -17.681384 | -17.474395 | -17.268436 | -17.063513 | 4.6 |
| -18.429218 | -18.006687 | -17.588280 | -17.174044 | -16.968507 | -16.764030 | -16.560623 | 4.4 |
| -17.909698 | -17.489711 | -17.073954 | -16.662484 | -16.458374 | -16.255356 | -16.053438 | 4.2 |
| -17.386005 | -16.968504 | -16.555341 | -16.146581 | -15.943870 | -15.742284 | -15.541829 | 4.0 |
| -16.858036 | -16.442958 | -16.032327 | -15.626213 | -15.424872 | -15.224686 | -15.025664 | 3.8 |
| -16.325688 | -15.912964 | -15.504796 | -15.101259 | -14.901253 | -14.702432 | -14.504809 | 3.6 |
| -15.788860 | -15.378415 | -14.972632 | -14.571597 | -14.372885 | -14.175392 | -13.979128 | 3.4 |
| -15.247451 | -14.839202 | -14.435723 | -14.037104 | -13.839645 | -13.643436 | -13.448488 | 3.2 |
| -14.701361 | -14.295221 | -13.893955 | -13.497659 | -13.301407 | -13.106434 | -12.912756 | 3.0 |
| -14.150494 | -13.746368 | -13.347216 | -12.953144 | -12.758047 | -12.564260 | -12.371798 | 2.8 |
| -13.594754 | -13.192540 | -12.795398 | -12.403442 | -12.209443 | -12.016787 | -11.825485 | 2.6 |
| -13.034052 | -12.633641 | -12.238396 | -11.848439 | -11.655481 | -11.463893 | -11.273689 | 2.4 |
| -12.468298 | -12.069575 | -11.676108 | -11.288025 | -11.096044 | -10.905460 | -10.716289 | 2.2 |
| -11.897411 | -11.500254 | -11.108436 | -10.722094 | -10.531022 | -10.341373 | -10.153165 | 2.0 |
| -11.610019 | -11.213597 | -10.822551 | -10.437028 | -10.246384 | -10.057176 | - 9.869422 | 1.9 |
| -11.321316 | -10.925597 | -10.535287 | -10.150543 | - 9.960309 | - 9.771524 | - 9.584208 | 1.8 |
| -11.031296 | -10.636246 | -10.246630 | - 9.862626 | - 9.672784 | - 9.484406 | - 9.297509 | 1.7 |
| -10.739951 | -10.345538 | - 9.956570 | - 9.573262 | - 9.383794 | - 9.195808 | - 9.009315 | 1.6 |
| -10.447283 | -10.053470 | - 9.665095 | - 9.282432 | - 9.093321 | - 8.905715 | - 8.719617 | 1.5 |
| -10.153295 | - 9.760048 | - 9.372190 | - 8.990110 | - 8.801343 | - 8.614112 | - 8.428409 | 1.4 |
| - 9.858004 | - 9.465284 | - 9.077837 | - 8.696259 | - 8.507826 | - 8.320982 | - 8.135687 | 1.3 |
| - 9.561445 | - 9.169217 | - 8.782015 | - 8.400815 | - 8.212718 | - 8.026292 | - 7.841458 | 1.2 |
| - 9.263693 | - 8.871921 | - 8.484680 | - 8.103669 | - 7.915925 | - 7.730009 | - 7.545745 | 1.1 |
| - 8.964897 | - 8.573542 | - 8.185770 | - 7.804622 | - 7.617292 | - 7.432063 | - 7.248598 | 1.0 |
| - 8.665337 | - 8.274362 | - 7.885169 | - 7.503310 | - 7.316518 | - 7.132340 | - 6.950119 | 0.9 |
| - 8.365546 | - 7.974910 | - 7.582673 | - 7.199053 | - 7.013055 | - 6.830630 | - 6.650514 | 0.8 |
| - 8.066519 | - 7.676184 | - 7.277913 | - 6.890567 | - 6.705880 | - 6.526567 | - 6.350184 | 0.7 |
| - 7.770115 | - 7.380042 | - 6.970240 | - 6.575458 | - 6.393063 | - 6.219500 | - 6.049923 | 0.6 |
| - 7.479771 | - 7.089920 | - 6.658585 | - 6.248821 | - 6.070951 | - 5.908360 | - 5.751344 | 0.5 |
| - 7.201738 | - 6.812070 | - 6.341459 | - 5.901263 | - 5.732544 | - 5.591656 | - 5.457866 | 0.4 |
| - 6.947033 | - 6.557505 | - 6.018039 | - 5.512264 | - 5.364413 | - 5.268565 | - 5.177063 | 0.3 |
| - 6.733761 | - 6.344334 | - 5.694458 | - 5.031695 | - 4.941449 | - 4.945219 | - 4.925982 | 0.2 |
| - 6.587553 | - 6.198189 | - 5.409309 | - 4.292294 | - 4.436170 | - 4.660210 | - 4.739381 | 0.1 |
| - 6.534838 | - 6.145493 | - 5.280725 | +∞ | - 4.073656 | - 4.531674 | - 4.667768 | 0.0 |

$$u=\ln|\Gamma(x+iy)|=\Re\ln\Gamma(z)$$

$\longrightarrow x$

| $y$ ↑ | −5.6 | −5.5 | −5.4 | −5.3 | −5.2 | −5.1 | −5.0 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 10.0 | -29.175184 | -28.929345 | -28.683947 | -28.438986 | -28.194461 | -27.950367 | -27.706699 |
| 9.8 | -28.750524 | -28.506155 | -28.262241 | -28.018780 | -27.775764 | -27.533205 | -27.291062 |
| 9.6 | -28.324031 | -28.081146 | -27.838730 | -27.596780 | -27.355290 | -27.114260 | -26.873682 |
| 9.4 | -27.895648 | -27.654261 | -27.413358 | -27.172933 | -26.932985 | -26.693508 | -26.454501 |
| 9.2 | -27.465320 | -27.225444 | -26.986066 | -26.747182 | -26.508790 | -26.270884 | -26.033462 |
| 9.0 | -27.032987 | -26.794635 | -26.556796 | -26.319467 | -26.082645 | -25.846326 | -25.610506 |
| 8.8 | -26.598587 | -26.361772 | -26.125486 | -25.889726 | -25.654489 | -25.419772 | -25.185569 |
| 8.6 | -26.162056 | -25.926790 | -25.692070 | -25.457893 | -25.224255 | -24.991154 | -24.758586 |
| 8.4 | -25.723328 | -25.489623 | -25.256482 | -25.023901 | -24.791877 | -24.560408 | -24.329488 |
| 8.2 | -25.282332 | -25.050200 | -24.818650 | -24.587679 | -24.357283 | -24.127460 | -23.898205 |
| 8.0 | -24.838997 | -24.608449 | -24.378503 | -24.149153 | -23.920399 | -23.692237 | -23.464662 |
| 7.8 | -24.393248 | -24.164295 | -23.935963 | -23.708248 | -23.481149 | -23.254659 | -23.028780 |
| 7.6 | -23.945007 | -23.717659 | -23.490953 | -23.264885 | -23.039451 | -22.814650 | -22.590479 |
| 7.4 | -23.494193 | -23.268460 | -23.043389 | -22.818978 | -22.595223 | -22.372123 | -22.149674 |
| 7.2 | -23.040723 | -22.816613 | -22.593187 | -22.370443 | -22.148379 | -21.926991 | -21.706277 |
| 7.0 | -22.584508 | -22.362030 | -22.140258 | -21.919191 | -21.698826 | -21.479163 | -21.260196 |
| 6.8 | -22.125460 | -21.904619 | -21.684508 | -21.465126 | -21.246471 | -21.028542 | -20.811334 |
| 6.6 | -21.663484 | -21.444286 | -21.225843 | -21.008153 | -20.791216 | -20.575029 | -20.359591 |
| 6.4 | -21.198483 | -20.980932 | -20.764162 | -20 548170 | -20.332958 | -20.118522 | -19.904862 |
| 6.2 | -20.730357 | -20.514456 | -20.299362 | -20.085073 | -19.871591 | -19.658913 | -19.447039 |
| 6.0 | -20.259002 | -20.044752 | -19.831336 | -19.618753 | -19.407005 | -19.196090 | -18.986008 |
| 5.8 | -19.784310 | -19.571710 | -19.359972 | -19.149097 | -18.939086 | -18.729937 | -18.521650 |
| 5.6 | -19.306170 | -19.095218 | -18.885156 | -18.675988 | -18.467713 | -18.260332 | -18.053845 |
| 5.4 | -18.824468 | -18.615158 | -18.406770 | -18.199305 | -17.992765 | -17.787151 | -17.582463 |
| 5.2 | -18.339086 | -18.131412 | -17.924690 | -17.718924 | -17.514114 | -17.310263 | -17.107372 |
| 5.0 | -17.849902 | -17.643854 | -17.438191 | -17.234715 | -17.031628 | -16.829535 | -16.628436 |
| 4.8 | -17.356793 | -17.152359 | -16.948941 | -16.746545 | -16.545172 | -16.344827 | -16.145513 |
| 4.6 | -16.859631 | -16.656794 | -16.455008 | -16.254277 | -16.054606 | -15.855997 | -15.658456 |
| 4.4 | -16.358286 | -16.157028 | -15.956856 | -15.757772 | -15.559786 | -15.362898 | -15.167116 |
| 4.2 | -15.852625 | -15.652924 | -15.454343 | -15.256887 | -15.060564 | -14.865379 | -14.671336 |
| 4.0 | -15.342513 | -15.144344 | -14.947329 | -14.751476 | -14.556792 | -14.363284 | -14.170959 |
| 3.8 | -14.827814 | -14.631146 | -14.435668 | -14.241388 | -14.048314 | -13.856456 | -13.665821 |
| 3.6 | -14.308391 | -14.113189 | -13.919213 | -13.726472 | -13.534977 | -13.344734 | -13.155758 |
| 3.4 | -13.784104 | -13.590330 | -13.397817 | -13.206578 | -13.016621 | -12.827959 | -12.640601 |
| 3.2 | -13.254814 | -13.062424 | -12.871332 | -12.681550 | -12.493089 | -12.305963 | -12.120181 |
| 3.0 | -12.720383 | -12.529330 | -12.339610 | -12.151236 | -11.964222 | -11.778582 | -11.594328 |
| 2.8 | -12.180674 | -11.990904 | -11.802502 | -11.615483 | -11.429861 | -11.245652 | -11.062871 |
| 2.6 | -11.635553 | -11.447008 | -11.259865 | -11.074140 | -10.889850 | -10.707011 | -10.525640 |
| 2.4 | -11.084887 | -10.897503 | -10.711554 | -10.527059 | -10.344034 | -10.162498 | - 9.982469 |
| 2.2 | -10.528548 | -10.342257 | -10.157433 | - 9.974095 | - 9.792262 | - 9.611955 | - 9.433194 |
| 2.0 | - 9.966415 | - 9.781143 | - 9.597368 | - 9.415109 | - 9.234390 | - 9.055231 | - 8.877654 |
| 1.9 | - 9.683140 | - 9.498348 | - 9.315067 | - 9.133318 | - 8.953122 | - 8.774504 | - 8.597487 |
| 1.8 | - 9.398374 | - 9.214043 | - 9.031235 | - 8.849971 | - 8.670276 | - 8.492175 | - 8.315694 |
| 1.7 | - 9.112107 | - 8.928217 | - 8.745858 | - 8.565055 | - 8.385836 | - 8.208227 | - 8.032257 |
| 1.6 | - 8.824327 | - 8.640859 | - 8.458928 | - 8.278558 | - 8.099784 | - 7.922638 | - 7.747154 |
| 1.5 | - 8.535032 | - 8.351965 | - 8.170434 | - 7.990467 | - 7.812103 | - 7.635387 | - 7.460360 |
| 1.4 | - 8.244219 | - 8.061539 | - 7.880379 | - 7.700772 | - 7.522775 | - 7.346447 | - 7.171843 |
| 1.3 | - 7.951902 | - 7.769596 | - 7.588770 | - 7.409471 | - 7.231774 | - 7.055779 | - 6.881561 |
| 1.2 | - 7.658113 | - 7.476180 | - 7.295643 | - 7.116566 | - 6.939077 | - 6.763327 | - 6.589445 |
| 1.1 | - 7.362924 | - 7.181381 | - 7.001066 | - 6.822079 | - 6.644635 | - 6.468996 | - 6.295380 |
| 1.0 | - 7.066479 | - 6.885378 | - 6.705184 | - 6.526058 | - 6.348380 | - 6.172620 | - 5.999163 |
| 0.9 | - 6.769055 | - 6.588515 | - 6.408273 | - 6.228603 | - 6.050193 | - 5.873899 | - 5.700426 |
| 0.8 | - 6.471184 | - 6.291443 | - 6.110860 | - 5.929919 | - 5.749868 | - 5.572284 | - 5.398483 |
| 0.7 | - 6.173856 | - 5.995375 | - 5.813940 | - 5.630405 | - 5.447030 | - 5.266746 | - 5.092048 |
| 0.6 | - 5.878931 | - 5 702551 | - 5.519369 | - 5.330853 | - 5.141030 | - 4.955353 | - 4.778724 |
| 0.5 | - 5.589840 | - 5.417026 | - 5.230580 | - 5.032877 | - 4.830795 | - 4.634450 | - 4.453601 |
| 0.4 | - 5.312835 | - 5.145918 | - 4.953822 | - 4.739894 | - 4.514833 | - 4.297046 | - 4.107287 |
| 0.3 | - 5.058931 | - 4.901040 | - 4.700110 | - 4.459490 | - 4.192320 | - 3.929681 | - 3.719256 |
| 0.2 | - 4.846233 | - 4.700133 | - 4.487548 | - 4.208670 | - 3.869389 | - 3.507266 | - 3.239381 |
| 0.1 | - 4.700369 | - 4.565558 | - 4.341769 | - 4.022223 | - 3.584630 | - 3.002319 | - 2.500396 |
| 0.0 | - 4.647768 | - 4.517832 | - 4.289195 | - 3.950678 | - 3.456175 | - 2.639916 | $+\infty$ |

$$u = \ln|\Gamma(x+iy)| = \Re \ln \Gamma(z)$$

$\longrightarrow x$

| −4.9 | −4.8 | −4.7 | −4.6 | −4.5 | −4.4 | −4.3 | y |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| -27.463454 | -27.220628 | -26.978216 | -26.736213 | -26.494617 | -26.253421 | -26.012620 | 10.0 |
| -27.049368 | -26.808106 | -26.567269 | -26.326859 | -26.086865 | -25.847285 | -25.608115 | 9.8 |
| -26.633553 | -26.393873 | -26.154631 | -25.915829 | -25.677458 | -25.439514 | -25.201994 | 9.6 |
| -26.215957 | -25.977874 | -25.740246 | -25.503070 | -25.266341 | -25.030053 | -24.794202 | 9.4 |
| -25.796520 | -25.560052 | -25.324055 | -25.088525 | -24.853457 | -24.618845 | -24.384685 | 9.2 |
| -25.375181 | -25.140347 | -24.905999 | -24.672133 | -24.438745 | -24.205829 | -23.973381 | 9.0 |
| -24.951878 | -24.718695 | -24.486014 | -24.253832 | -24.022143 | -23.790944 | -23.560228 | 8.8 |
| -24.526546 | -24.295031 | -24.064035 | -23.833555 | -23.603586 | -23.374124 | -23.145161 | 8.6 |
| -24.099115 | -23.869285 | -23.639993 | -23.411233 | -23.183004 | -22.955299 | -22.728112 | 8.4 |
| -23.669516 | -23.441387 | -23.213816 | -22.986796 | -22.760325 | -22.534397 | -22.309006 | 8.2 |
| -23.237671 | -23.011262 | -22.785429 | -22.560167 | -22.335474 | -22.111343 | -21.887770 | 8.0 |
| -22.803505 | -22.578830 | -22.354752 | -22.131268 | -21.908371 | -21.686058 | -21.464323 | 7.8 |
| -22.366935 | -22.144010 | -21.921705 | -21.700015 | -21.478934 | -21.258459 | -21.038584 | 7.6 |
| -21.927874 | -21.706717 | -21.486201 | -21.266322 | -21.047076 | -20.828457 | -20.610462 | 7.4 |
| -21.486235 | -21.266860 | -21.048149 | -20.830099 | -20.612705 | -20.395963 | -20.179868 | 7.2 |
| -21.041925 | -20.824346 | -20.607455 | -20.391250 | -20.175726 | -19.960879 | -19.746704 | 7.0 |
| -20.594846 | -20.379077 | -20.164021 | -19.949676 | -19.736039 | -19.523105 | -19.310869 | 6.8 |
| -20.144899 | -19.930951 | -19.717744 | -19.505274 | -19.293539 | -19.082535 | -18.872256 | 6.6 |
| -19.691976 | -19.479860 | -19.268514 | -19.057933 | -18.846116 | -18.639058 | -18.430755 | 6.4 |
| -19.235967 | -19.025694 | -18.816220 | -18.607540 | -18.399654 | -18.192558 | -17.986247 | 6.2 |
| -18.776757 | -18.568336 | -18.360743 | -18.153976 | -17.948034 | -17.742913 | -17.538609 | 6.0 |
| -18.314227 | -18.107664 | -17.901961 | -17.697117 | -17.493128 | -17.289994 | -17.087712 | 5.8 |
| -17.848251 | -17.643552 | -17.439745 | -17.236830 | -17.034805 | -16.833669 | -16.633420 | 5.6 |
| -17.378701 | -17.175868 | -16.973961 | -16.772981 | -16.572927 | -16.373797 | -16.175591 | 5.4 |
| -16.905442 | -16.704475 | -16.504470 | -16.305428 | -16.107348 | -15.910232 | -15.714077 | 5.2 |
| -16.428334 | -16.229230 | -16.031126 | -15.834022 | -15.637920 | -15.442819 | -15.248721 | 5.0 |
| -15.947232 | -15.749986 | -15.553778 | -15.358611 | -15.164484 | -14.971400 | -14.779359 | 4.8 |
| -15.461987 | -15.266591 | -15.072272 | -14.879034 | -14.686878 | -14.495807 | -14.305822 | 4.6 |
| -14.972443 | -14.778884 | -14.586445 | -14.395126 | -14.204932 | -14.015868 | -13.827934 | 4.4 |
| -14.478443 | -14.286705 | -14.096128 | -13.906715 | -13.718471 | -13.531402 | -13.345510 | 4.2 |
| -13.979824 | -13.789885 | -13.601150 | -13.413624 | -13.227313 | -13.042223 | -12.858359 | 4.0 |
| -13.476417 | -13.288253 | -13.101335 | -12.915672 | -12.731271 | -12.548139 | -12.366283 | 3.8 |
| -12.968054 | -12.781632 | -12.596502 | -12.412673 | -12.230153 | -12.048952 | -11.869077 | 3.6 |
| -12.454559 | -12.269844 | -12.086465 | -11.904435 | -11.723762 | -11.544458 | -11.366532 | 3.4 |
| -11.935758 | -11.752706 | -11.571038 | -11.390764 | -11.211897 | -11.034449 | -10.858433 | 3.2 |
| -11.411476 | -11.230038 | -11.050029 | -10.871463 | -10.694354 | -10.518716 | -10.344562 | 3.0 |
| -10.881533 | -10.701654 | -10.523250 | -10.346336 | -10.170929 | - 9.997043 | - 9.824697 | 2.8 |
| -10.345754 | -10.167372 | - 9.990509 | - 9.815183 | - 9.641414 | - 9.469218 | - 9.298613 | 2.6 |
| - 9.803967 | - 9.627010 | - 9.451617 | - 9.277809 | - 9.105605 | - 8.935024 | - 8.766089 | 2.4 |
| - 9.255999 | - 9.080390 | - 8.906390 | - 8.734019 | - 8.563299 | - 8.394253 | - 8.226903 | 2.2 |
| - 8.701683 | - 8.527340 | - 8.354646 | - 8.183625 | - 8.014300 | - 7.846695 | - 7.680837 | 2.0 |
| - 8.422094 | - 8.248350 | - 8.076275 | - 7.905895 | - 7.737231 | - 7.570310 | - 7.405159 | 1.9 |
| - 8.140858 | 7.967690 | - 7.796212 | - 7.626447 | - 7.458420 | - 7.292156 | - 7.127683 | 1.8 |
| - 7.857954 | - 7.685339 | - 7.514436 | - 7.345264 | - 7.177846 | - 7.012210 | - 6.848385 | 1.7 |
| - 7.573360 | - 7.401278 | - 7.230928 | - 7.062325 | - 6.895493 | - 6.730454 | - 6.567242 | 1.6 |
| - 7.287052 | - 7.115485 | - 6.945671 | - 6.777620 | - 6.611345 | - 6.446871 | - 6.284234 | 1.5 |
| - 6.990020 | - 6.827939 | - 6.658654 | - 6.491140 | - 6.325400 | - 6.161453 | - 5.999341 | 1.4 |
| - 6.709170 | - 6.538615 | - 6.369866 | - 6.202892 | - 6.037666 | - 5.874202 | - 5.712552 | 1.3 |
| - 6.417498 | - 6.247477 | - 6.079309 | - 5.912899 | - 5.748179 | - 5.585143 | - 5.423863 | 1.2 |
| - 6.123888 | - 5.954482 | - 5.786996 | - 5.621228 | - 5.457022 | - 5.294339 | - 5.133285 | 1.1 |
| - 5.828178 | - 5.659558 | - 5.492974 | - 5.328018 | - 5.164368 | - 5.001925 | - 4.840860 | 1.0 |
| - 5.530064 | - 5.362585 | - 5.197340 | - 5.033538 | - 4.870555 | - 4.708174 | - 4.546683 | 0.9 |
| - 5.228994 | - 5.063349 | - 4.900295 | - 4.738316 | - 4.576227 | - 4.413605 | - 4.250948 | 0.8 |
| - 4.923938 | - 4.761478 | - 4.602234 | - 4.443338 | - 4.282593 | - 4.119209 | - 3.954051 | 0.7 |
| - 4.612967 | - 4.456320 | - 4.303947 | - 4.150457 | - 3.991888 | - 3.826835 | - 3.656779 | 0.6 |
| - 4.292421 | - 4.146800 | - 4.007045 | - 3.863103 | - 3.708162 | - 3.539912 | - 3.360740 | 0.5 |
| - 3.955299 | - 3.831425 | - 3.714944 | - 3.587524 | - 3.438532 | - 3.264687 | - 3.069347 | 0.4 |
| - 3.588169 | - 3.509371 | - 3.435214 | - 3.334732 | - 3.194807 | - 3.012170 | - 2.790184 | 0.3 |
| - 3.165922 | - 3.186766 | - 3.184900 | - 3.122829 | - 2.994724 | - 2.800464 | - 2.540251 | 0.2 |
| - 2.661074 | - 2.902203 | - 2.998761 | - 2.977443 | - 2.860644 | - 2.655198 | - 2.354338 | 0.1 |
| - 2.298704 | - 2.773816 | - 2.927302 | - 2.925002 | - 2.813084 | - 2.602796 | - 2.282971 | 0.0 |

$$u = \ln|\Gamma(x+iy)| = \Re \ln \Gamma(z)$$

$\longrightarrow x$ ; $y \uparrow$

| y | −4.2 | −4.1 | −4.0 | −3.9 | −3.8 | −3.7 | −3.6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 10.0 | -25.772210 | -25.532187 | -25.292542 | -25.053272 | -24.814373 | -24.575837 | -24.337657 |
| 9.8 | -25.369346 | -25.130989 | -24.893002 | -24.655414 | -24.418208 | -24.181376 | -23.944918 |
| 9.6 | -24.964889 | -24.728198 | -24.491911 | -24.256026 | -24.020538 | -23.785437 | -23.550721 |
| 9.4 | -24.558782 | -24.323789 | -24.089216 | -23.855059 | -23.621310 | -23.387965 | -23.155016 |
| 9.2 | -24.150971 | -23.917698 | -23.684861 | -23.452454 | -23.220470 | -22.988904 | -22.757749 |
| 9.0 | -23.741394 | -23.509865 | -23.278786 | -23.048153 | -22.817959 | -22.588198 | -22.358863 |
| 8.8 | -23.329991 | -23.100227 | -22.870930 | -22.642095 | -22.413715 | -22.185784 | -21.958296 |
| 8.6 | -22.916695 | -22.688719 | -22.461228 | -22.234215 | -22.007675 | -21.781600 | -21.555985 |
| 8.4 | -22.501438 | -22.275274 | -22.049611 | -21.824446 | -21.599770 | -21.375578 | -21.151863 |
| 8.2 | -22.084148 | -21.859818 | -21.636008 | -21.412714 | -21.189929 | -20.967647 | -20.745860 |
| 8.0 | -21.664750 | -21.442276 | -21.220343 | -20.998946 | -20.778078 | -20.557732 | -20.337901 |
| 7.8 | -21.243162 | -21.022568 | -20.802537 | -20.583063 | -20.364136 | -20.145754 | -19.927908 |
| 7.6 | -20.819303 | -20.600612 | -20.382507 | -20.164979 | -19.948022 | -19.731631 | -19.515797 |
| 7.4 | -20.393085 | -20.176320 | -19.960163 | -19.744608 | -19.529646 | -19.315273 | -19.101482 |
| 7.2 | -19.964415 | -19.749599 | -19.535415 | -19.321856 | -19.108917 | -18.896590 | -18.684869 |
| 7.0 | -19.533196 | -19.320352 | -19.108163 | -18.896627 | -18.685735 | -18.475482 | -18.265861 |
| 6.8 | -19.099327 | -18.888476 | -18.678307 | -18.468816 | -18.259999 | -18.051847 | -17.844354 |
| 6.6 | -18.662701 | -18.453862 | -18.245736 | -18.038317 | -17.831598 | -17.625575 | -17.420238 |
| 6.4 | -18.223204 | -18.016400 | -17.810338 | -17.605013 | -17.400419 | -17.196550 | -16.993399 |
| 6.2 | -17.780719 | -17.575968 | -17.371992 | -17.168784 | -16.966338 | -16.764650 | -16.563713 |
| 6.0 | -17.335121 | -17.132443 | -16.930571 | -16.729501 | -16.529228 | -16.329746 | -16.131049 |
| 5.8 | -16.886279 | -16.685690 | -16.485942 | -16.287031 | -16.088953 | -15.891702 | -15.695272 |
| 5.6 | -16.434056 | -16.235571 | -16.037965 | -15.841232 | -15.645370 | -15.450372 | -15.256233 |
| 5.4 | -15.978307 | -15.781941 | -15.586491 | -15.391954 | -15.198326 | -15.005604 | -14.813780 |
| 5.2 | -15.518882 | -15.324646 | -15.131366 | -14.939039 | -14.747664 | -14.557235 | -14.367748 |
| 5.0 | -15.055622 | -14.863524 | -14.672425 | -14.482322 | -14.293213 | -14.105095 | -13.917965 |
| 4.8 | -14.588361 | -14.398407 | -14.209496 | -14.021627 | -13.834797 | -13.649005 | -13.464248 |
| 4.6 | -14.116926 | -13.929118 | -13.742400 | -13.557702 | -13.372228 | -13.188774 | -13.006404 |
| 4.4 | -13.641136 | -13.455473 | -13.270947 | -13.087559 | -12.905310 | -12.724201 | -12.544228 |
| 4.2 | -13.160801 | -12.977277 | -12.794940 | -12.613793 | -12.433837 | -12.255075 | -12.077504 |
| 4.0 | -12.675727 | -12.494330 | -12.314173 | -12.135259 | -11.957592 | -11.781174 | -11.606008 |
| 3.8 | -12.185709 | -12.006423 | -11.828431 | -11.651738 | -11.476349 | -11.302268 | -11.129499 |
| 3.6 | -11.690537 | -11.513338 | -11.337491 | -11.163001 | -10.989872 | -10.818114 | -10.647731 |
| 3.4 | -11.189995 | -11.014856 | -10.841124 | -10.668807 | -10.497917 | -10.328459 | -10.160441 |
| 3.2 | -10.683861 | -10.510743 | -10.339090 | -10.168915 | -10.000228 | - 9.833040 | - 9.667360 |
| 3.0 | -10.171907 | -10.000765 | - 9.831148 | - 9.663070 | - 9.496546 | - 9.331586 | - 9.168205 |
| 2.8 | - 9.653905 | - 9.484683 | - 9.317047 | - 9.151014 | - 8.986600 | - 8.823819 | - 8.662688 |
| 2.6 | - 9.129619 | - 8.962254 | - 8.796536 | - 8.632484 | - 8.470118 | - 8.309454 | - 8.150512 |
| 2.4 | - 8.598820 | - 8.433237 | - 8.269362 | - 8.107216 | - 7.946822 | - 7.788201 | - 7.631374 |
| 2.2 | - 8.061273 | - 7.897387 | - 7.735269 | - 7.574944 | - 7.416435 | - 7.259770 | - 7.104970 |
| 2.0 | - 7.516752 | - 7.354465 | - 7.194007 | - 7.035402 | - 6.878681 | - 6.723870 | - 6.570997 |
| 1.9 | - 7.241805 | - 7.080279 | - 6.920609 | - 6.762824 | - 6.606955 | - 6.453030 | - 6.301076 |
| 1.8 | - 6.965032 | - 6.804235 | - 6.645325 | - 6.488331 | - 6.333286 | - 6.180217 | - 6.029156 |
| 1.7 | - 6.686405 | - 6.526306 | - 6.368123 | - 6.211891 | - 6.057639 | - 5.905398 | - 5.755196 |
| 1.6 | - 6.405897 | - 6.246460 | - 6.088971 | - 5.933468 | - 5.779982 | - 5.628539 | - 5.479166 |
| 1.5 | - 6.123480 | - 5.964664 | - 5.807833 | - 5.653029 | - 5.500281 | - 5.349611 | - 5.201039 |
| 1.4 | - 5.839127 | - 5.630881 | - 5.524666 | - 5.370531 | - 5.218501 | - 5.068587 | - 4.920791 |
| 1.3 | - 5.552803 | - 5.395063 | - 5.239417 | - 5.085925 | - 4.934607 | - 4.785444 | - 4.638416 |
| 1.2 | - 5.264476 | - 5.107144 | - 4.952006 | - 4.799140 | - 4.648548 | - 4.500171 | - 4.353924 |
| 1.1 | - 4.974088 | - 4.817020 | - 4.662309 | - 4.510069 | - 4.360274 | - 4.212770 | - 4.067368 |
| 1.0 | - 4.681564 | - 4.524516 | - 4.370115 | - 4.218540 | - 4.069699 | - 3.923274 | - 3.778873 |
| 0.9 | - 4.385777 | - 4.229325 | - 4.075045 | - 3.924239 | - 3.776693 | - 3.631772 | - 3.488699 |
| 0.8 | - 4.[illegible] | - 3.930889 | - 3.776404 | - 3.626605 | - 3.481034 | - 3.338452 | - 3.197361 |
| 0.7 | - 3.7893[illegible] | - 3.628173 | - 3.472905 | - 3.324602 | - 3.182340 | - 3.043701 | - 2.905835 |
| 0.6 | - 3.48[illegible]8 | - 3.319240 | - 3.162137 | - 3.016290 | - 2.879952 | - 2.748302 | - 2.615965 |
| 0.5 | - 3.177534 | - 3.000427 | - 2.838188 | - 2.698006 | - 2.572788 | - 2.453856 | - 2.331174 |
| 0.4 | - 2.863224 | - 2.664740 | - 2.494659 | - 2.362743 | - 2.259349 | - 2.163773 | - 2.057701 |
| 0.3 | - 2.542000 | - 2.298713 | - 2.108021 | - 1.997064 | - 1.938806 | - 1.885619 | - 1.806553 |
| 0.2 | - 2.219991 | - 1.877257 | - 1.628143 | - 1.575855 | - 1.617283 | - 1.636433 | - 1.595828 |
| 0.1 | - 1.935786 | - 1.372886 | - 0.890758 | - 1.071630 | - 1.333370 | - 1.450972 | - 1.451150 |
| 0.0 | - 1.807517 | - 1.010675 | +∞ | - 0.709469 | - 1.205200 | - 1.379740 | - 1.398945 |

$$u=\ln|\Gamma(x+iy)|=\Re\ln\Gamma(z)$$

$\longrightarrow x$

| -3.5 | -3.4 | -3.3 | -3.2 | 3.1 | -3.0 | -2.9 | y |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| -24.099830 | -23.862349 | -23.625205 | -23.388395 | -23.151912 | -22.915747 | -22.679894 | 10.0 |
| -23.708821 | -23.473083 | -23.237697 | -23.002653 | -22.767949 | -22.533574 | -22.299524 | 9.8 |
| -23.316381 | -23.082412 | -22.848808 | -22.615558 | -22.382661 | -22.150105 | -21.917885 | 9.6 |
| -22.922459 | -22.690286 | -22.458489 | -22.227063 | -21.996000 | -21.765293 | -21.534935 | 9.4 |
| -22.527001 | -22.296650 | -22.066689 | -21.837114 | -21.607915 | -21.379086 | -21.150619 | 9.2 |
| -22.129949 | -21.901448 | -21.673352 | -21.445656 | -21.218351 | -20.991431 | -20.764886 | 9.0 |
| -21.731244 | -21.504621 | -21.278419 | -21.052632 | -20.827252 | -20.602271 | -20.377680 | 8.8 |
| -21.330823 | -21.106106 | -20.881827 | -20.657980 | -20.434555 | -20.211546 | -19.988943 | 8.6 |
| -20.928619 | -20.705838 | -20.483513 | -20.261635 | -20.040198 | -19.819192 | -19.598611 | 8.4 |
| -20.524563 | -20.303747 | -20.083405 | -19.863529 | -19.644112 | -19.425144 | -19.206618 | 8.2 |
| -20.118580 | -19.899759 | -19.681431 | -19.463590 | -19.246226 | -19.029330 | -18.812895 | 8.0 |
| -19.710591 | -19.493797 | -19.277515 | -19.061740 | -18.846462 | -18.631675 | -18.417367 | 7.8 |
| -19.300516 | -19.085777 | -18.871575 | -18.657900 | -18.444743 | -18.232098 | -18.019955 | 7.6 |
| -18.888265 | -18.675615 | -18.463523 | -18.251982 | -18.040982 | -17.830516 | -17.620575 | 7.4 |
| -18.473747 | -18.263216 | -18.053268 | -17.843895 | -17.635088 | -17.426839 | -17.219137 | 7.2 |
| -18.056864 | -17.848485 | -17.640714 | -17.433544 | -17.226966 | -17.020970 | -16.815547 | 7.0 |
| -17.637513 | -17.431317 | -17.225757 | -17.020824 | -16.816512 | -16.612808 | -16.409704 | 6.8 |
| -17.215584 | -17.011603 | -16.808286 | -16.605627 | -16.403616 | -16.202244 | -16.001501 | 6.6 |
| -16.790960 | -16.589226 | -16.388187 | -16.187836 | -15.988165 | -15.789163 | -15.590822 | 6.4 |
| -16.363520 | -16.164064 | -15.965336 | -15.767329 | -15.570034 | -15.373442 | -15.177543 | 6.2 |
| -15.933131 | -15.735984 | -15.539601 | -15.343973 | -15.149092 | -14.954949 | -14.761534 | 6.0 |
| -15.499656 | -15.304848 | -15.110842 | -14.917628 | -14.725199 | -14.533543 | -14.342654 | 5.8 |
| -15.062948 | -14.870509 | -14.678911 | -14.488145 | -14.298203 | -14.109076 | -13.920754 | 5.6 |
| -14.622850 | -14.432809 | -14.243650 | -14.055365 | -13.867947 | -13.681385 | -13.495673 | 5.4 |
| -14.179199 | -13.991582 | -13.804891 | -13.619119 | -13.434258 | -13.250301 | -13.067237 | 5.2 |
| -13.731819 | -13.546650 | -13.362455 | -13.179226 | -12.996955 | -12.815639 | -12.635264 | 5.0 |
| -13.280523 | -13.097826 | -12.916151 | -12.735493 | -12.555846 | -12.377203 | -12.199555 | 4.8 |
| -12.825117 | -12.644909 | -12.465777 | -12.287716 | -12.110720 | -11.934783 | -11.759898 | 4.6 |
| -12.365391 | -12.187689 | -12.011118 | -11.835677 | -11.661358 | -11.488156 | -11.316066 | 4.4 |
| -11.901127 | -11.725943 | -11.551948 | -11.379143 | -11.207523 | -11.037082 | -10.867818 | 4.2 |
| -11.432094 | -11.259433 | -11.088024 | -10.917869 | -10.748963 | -10.581305 | -10.414890 | 4.0 |
| -10.958046 | -10.787909 | -10.619091 | -10.451592 | -10.285413 | -10.120552 | - 9.957007 | 3.8 |
| -10.478728 | -10.311109 | -10.144877 | - 9.980037 | - 9.816588 | - 9.654533 | - 9.493872 | 3.6 |
| - 9.993872 | - 9.828756 | - 9.665101 | - 9.502910 | - 9.342190 | - 9.182941 | - 9.025166 | 3.4 |
| - 9.503198 | - 9.340562 | - 9.179462 | - 9.019906 | - 8.861899 | - 8.705448 | - 8.550557 | 3.2 |
| - 9.006414 | - 8.846226 | - 8.687651 | - 8.530700 | - 8.375384 | - 8.221710 | - 8.069687 | 3.0 |
| - 8.503222 | - 8.345435 | - 8.189342 | - 8.034958 | - 7.882294 | - 7.731365 | - 7.582181 | 2.8 |
| - 7.993310 | - 7.837867 | - 7.684200 | - 7.532328 | - 7.382267 | - 7.234034 | - 7.087645 | 2.6 |
| - 7.476364 | - 7.323192 | - 7.171881 | - 7.022452 | - 6.874926 | - 6.729325 | - 6.585670 | 2.4 |
| - 6.952064 | - 6.801076 | - 6.652033 | - 6.504960 | - 6.359884 | - 6.216832 | - 6.075829 | 2.2 |
| - 6.420091 | - 6.271183 | - 6.124302 | - 5.979480 | - 5.836749 | - 5.696140 | - 5.557687 | 2.0 |
| - 6.151129 | - 6.003216 | - 5.857370 | - 5.713627 | - 5.572021 | - 5.432589 | - 5.295364 | 1.9 |
| - 5.880133 | - 5.733181 | - 5.588336 | - 5.445636 | - 5.305121 | - 5.166829 | - 5.030799 | 1.8 |
| - 5.607065 | - 5.461039 | - 5.317157 | - 5.175461 | - 5.035996 | - 4.898807 | - 4.763935 | 1.7 |
| - 5.331893 | - 5.186755 | - 5.043792 | - 4.903056 | - 4.764597 | - 4.628467 | - 4.494712 | 1.6 |
| - 5.054588 | - 4.910293 | - 4.768202 | - 4.628372 | - 4.490868 | - 4.355750 | - 4.223073 | 1.5 |
| - 4.775129 | - 4.631631 | - 4.490350 | - 4.351362 | - 4.214751 | - 4.080593 | - 3.948949 | 1.4 |
| - 4.493511 | - 4.350752 | - 4.210206 | - 4.071974 | - 3.936178 | - 3.802917 | - 3.672268 | 1.3 |
| - 4.209753 | - 4.067666 | - 3.927750 | - 3.790156 | - 3.655061 | - 3.522623 | - 3.392935 | 1.2 |
| - 3.923927 | - 3.782422 | - 3.642976 | - 3.505832 | - 3.371278 | - 3.239564 | - 3.110819 | 1.1 |
| - 3.636189 | - 3.495139 | - 3.355910 | - 3.218909 | - 3.084636 | - 2.953508 | - 2.825726 | 1.0 |
| - 3.346867 | - 3.206076 | - 3.066630 | - 2.929245 | - 2.794808 | - 2.664058 | - 2.537320 | 0.9 |
| - 3.056591 | - 2.915739 | - 2.775319 | - 2.636609 | - 2.501220 | - 2.370501 | - 2.245021 | 0.8 |
| - 2.766561 | - 2.625107 | - 2.482358 | - 2.340608 | - 2.202820 | - 2.071527 | - 1.947772 | 0.7 |
| - 2.478999 | - 2.336018 | - 2.188523 | - 2.040573 | - 1.897658 | - 1.764717 | - 1.643617 | 0.6 |
| - 2.197950 | - 2.051893 | - 1.895410 | - 1.735413 | - 1.582058 | - 1.445141 | - 1.328878 | 0.5 |
| - 1.930520 | - 1.778968 | - 1.606424 | - 1.423625 | - 1.249016 | - 1.103389 | - 0.996534 | 0.4 |
| - 1.688512 | - 1.528246 | - 1.329141 | - 1.104371 | - 0.885056 | - 0.718922 | - 0.633137 | 0.3 |
| - 1.489660 | - 1.317827 | - 1.080556 | - 0.783774 | - 0.465082 | - 0.241601 | - 0.213565 | 0.2 |
| - 1.356320 | - 1.173335 | - 0.895453 | - 0.500418 | + 0.038398 | + 0.495849 | + 0.289675 | 0.1 |
| - 1.309007 | - 1.121192 | - 0.824356 | - 0.372432 | + 0.400312 | +∞ | + 0.651508 | 0.0 |

$$u = \ln|\Gamma(x+iy)| = \Re \ln \Gamma(z)$$

$\longrightarrow x$

| $y$ ↑ | −2.8 | −2.7 | −2.6 | −2.5 | −2.4 | −2.3 | −2.2 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 10.0 | -22.444348 | -22.209099 | -21.974140 | -21.739466 | -21.505068 | -21.270936 | -21.037065 |
| 9.8 | -22.065791 | -21.832365 | -21.599244 | -21.366415 | -21.133872 | -20.901609 | -20.669614 |
| 9.6 | -21.685996 | -21.454425 | -21.223170 | -20.992219 | -20.761564 | -20.531201 | -20.301115 |
| 9.4 | -21.304917 | -21.075233 | -20.845875 | -20.616833 | -20.388101 | -20.159668 | -19.931527 |
| 9.2 | -20.922506 | -20.694740 | -20.467311 | -20.240212 | -20.013435 | -19.786969 | -19.560807 |
| 9.0 | -20.538710 | -20.312894 | -20.087428 | -19.862307 | -19.637519 | -19.413056 | -19.188909 |
| 8.8 | -20.153474 | -19.929641 | -19.706174 | -19.483064 | -19.260303 | -19.037879 | -18.815785 |
| 8.6 | -19.766739 | -19.544925 | -19.323491 | -19.102430 | -18.881731 | -18.661385 | -18.441382 |
| 8.4 | -19.378444 | -19.158684 | -18.939320 | -18.720345 | -18.501748 | -18.283518 | -18.065646 |
| 8.2 | -18.988525 | -18.770855 | -18.553598 | -18.336747 | -18.120291 | -17.904218 | -17.688519 |
| 8.0 | -18.596911 | -18.381369 | -18.166258 | -17.951571 | -17.737295 | -17.523421 | -17.309938 |
| 7.8 | -18.203529 | -17.990153 | -17.777229 | -17.564746 | -17.352693 | -17.141061 | -16.929837 |
| 7.6 | -17.808302 | -17.597132 | -17.386433 | -17.176197 | -16.966411 | -16.757065 | -16.548146 |
| 7.4 | -17.411146 | -17.202222 | -16.993791 | -16.785844 | -16.578369 | -16.371355 | -16.164788 |
| 7.2 | -17.011973 | -16.805336 | -16.599216 | -16.393603 | -16.188484 | -15.983848 | -15.779683 |
| 7.0 | -16.610688 | -16.406381 | -16.202616 | -15.999382 | -15.796668 | -15.594459 | -15.392745 |
| 6.8 | -16.207192 | -16.005258 | -15.803893 | -15.603085 | -15.402822 | -15.203092 | -15.003881 |
| 6.6 | -15.801377 | -15.601861 | -15.392941 | -15.204607 | -15.006846 | -14.809645 | -14.612990 |
| 6.4 | -15.393129 | -15.196076 | -14.999648 | -14.803837 | -14.608629 | -14.414009 | -14.219967 |
| 6.2 | -14.982326 | -14.787780 | -14.593893 | -14.400655 | -14.208052 | -14.016070 | -13.824695 |
| 6.0 | -14.568836 | -14.376845 | -14.185547 | -13.994933 | -13.804988 | -13.615698 | -13.427050 |
| 5.8 | -14.152520 | -13.963130 | -13.774471 | -13.586532 | -13.399300 | -13.212760 | -13.026899 |
| 5.6 | -13.733228 | -13.546486 | -13.360515 | -13.175304 | -12.990840 | -12.807109 | -12.624095 |
| 5.4 | -13.310798 | -13.126751 | -12.943519 | -12.761089 | -12.579450 | -12.398586 | -12.218483 |
| 5.2 | -12.885058 | -12.703753 | -12.523309 | -12.343714 | -12.164956 | -11.987020 | -11.809891 |
| 5.0 | -12.455823 | -12.277305 | -12.099699 | -11.922993 | -11.747173 | -11.572226 | -11.398135 |
| 4.8 | -12.022893 | -11.847208 | -11.672489 | -11.498723 | -11.325899 | -11.154001 | -10.983015 |
| 4.6 | -11.586055 | -11.413247 | -11.241462 | -11.070689 | -10.900916 | -10.732128 | -10.564312 |
| 4.4 | -11.145080 | -10.975190 | -10.806385 | -10.638655 | -10.471988 | -10.306370 | -10.141790 |
| 4.2 | -10.699721 | -10.532787 | -10.367004 | -10.202365 | -10.038858 | - 9.876470 | - 9.715189 |
| 4.0 | -10.249713 | -10.085769 | - 9.923050 | - 9.761547 | - 9.601250 | - 9.442147 | - 9.284227 |
| 3.8 | - 9.794774 | - 9.633850 | - 9.474228 | - 9.315901 | - 9.158861 | - 9.003096 | - 8.848596 |
| 3.6 | - 9.334601 | - 9.176720 | - 9.020224 | - 8.865107 | - 8.711364 | - 8.558985 | - 8.407961 |
| 3.4 | - 8.868869 | - 8.714046 | - 8.560697 | - 8.408819 | - 8.258407 | - 8.109455 | - 7.961956 |
| 3.2 | - 8.397231 | - 8.245473 | - 8.095284 | - 7.946662 | - 7.799607 | - 7.654115 | - 7.510182 |
| 3.0 | - 7.919324 | - 7.770624 | - 7.623594 | - 7.478236 | - 7.334553 | - 7.192543 | - 7.052205 |
| 2.8 | - 7.434755 | - 7.289095 | - 7.145212 | - 7.003111 | - 6.862798 | - 6.724279 | - 6.587554 |
| 2.6 | - 6.943117 | - 6.800643 | - 6.659695 | - 6.520827 | - 6.383870 | - 6.248832 | - 6.115721 |
| 2.4 | - 6.443981 | - 6.304277 | - 6.166578 | - 6.030900 | - 5.897261 | - 5.765676 | - 5.636157 |
| 2.2 | - 5.936901 | - 5.800074 | - 5.665371 | - 5.532817 | - 5.402436 | - 5.274248 | - 5.148275 |
| 2.0 | - 5.421420 | - 5.287370 | - 5.155568 | - 5.026045 | - 4.898831 | - 4.773957 | - 4.651452 |
| 1.9 | - 5.160382 | - 5.027676 | - 4.897281 | - 4.769229 | - 4.643556 | - 4.520296 | - 4.399484 |
| 1.8 | - 4.897069 | - 4.765674 | - 4.636650 | - 4.510035 | - 4.385867 | - 4.264186 | - 4.145033 |
| 1.7 | - 4.631419 | - 4.501300 | - 4.373612 | - 4.248395 | - 4.125691 | - 4.005547 | - 3.888011 |
| 1.6 | - 4.363375 | - 4.234493 | - 4.108101 | - 3.984242 | 3.862958 | - 3.744302 | - 3.628333 |
| 1.5 | - 4.092876 | - 3.965295 | - 3.840062 | - 3.717513 | - 3.597596 | - 3.480371 | - 3.365908 |
| 1.4 | - 3.819861 | - 3.693351 | - 3.569440 | - 3.448156 | - 3.329545 | - 3.213678 | - 3.100644 |
| 1.3 | - 3.544266 | - 3.418910 | - 3.296196 | - 3.176129 | - 3.058753 | - 2.944152 | - 2.832446 |
| 1.2 | - 3.266018 | - 3.141831 | - 3.020310 | - 2.901421 | - 2.785192 | - 2.671732 | - 2.561217 |
| 1.1 | - 2.985039 | - 2.862089 | - 2.741805 | - 2.624066 | - 2.508873 | - 2.396373 | - 2.286837 |
| 1.0 | - 2.701218 | - 2.579691 | - 2.460775 | - 2.344191 | - 2.229881 | - 2.118061 | - 2.009170 |
| 0.9 | - 2.414404 | - 2.294697 | - 2.177453 | - 2.062090 | - 1.948439 | - 1.836836 | - 1.728029 |
| 0.8 | - 2.124349 | - 2.007274 | - 1.892326 | - 1.778365 | - 1.665021 | - 1.552843 | - 1.443146 |
| 0.7 | - 1.830654 | - 1.717785 | - 1.606345 | - 1.494187 | - 1.380575 | - 1.266429 | - 1.154086 |
| 0.6 | - 1.532638 | - 1.426990 | - 1.321332 | - 1.211754 | - 1.096909 | - 0.978339 | - 0.860146 |
| 0.5 | - 1.229204 | - 1.136474 | - 1.040687 | - 0.935086 | - 0.817419 | - 0.690138 | - 0.560202 |
| 0.4 | - 0.918839 | - 0.849630 | - 0.770632 | - 0.671268 | - 0.548319 | - 0.405209 | - 0.252722 |
| 0.3 | - 0.600698 | - 0.574009 | - 0.522159 | - 0.432089 | - 0.300593 | - 0.131104 | + 0.063155 |
| 0.2 | - 0.280899 | - 0.326642 | - 0.313353 | - 0.235267 | - 0.092325 | + 0.115200 | 0.361326 |
| 0.1 | 0.001977 | - 0.142274 | - 0.169831 | - 0.103149 | + 0.050872 | 0.298928 | 0.663221 |
| 0.0 | 0.129801 | - 0.071407 | - 0.118012 | - 0.056244 | 0.102584 | 0.369567 | 0.790719 |

$$u=\ln|\Gamma(x+iy)|=\Re\ln\Gamma(z)$$

$\longrightarrow x$

| 2.1 | −2.0 | −1.9 | −1.8 | −1.7 | −1.6 | −1.5 | y |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| -20.803448 | -20.570073 | -20.336934 | -20.104024 | -19.871331 | -19.638849 | -19.406569 | 10.0 |
| -20.437883 | -20.206403 | -19.975170 | -19.744172 | -19.513401 | -19.282851 | -19.052509 | 9.8 |
| -20.071304 | -19.841754 | -19.612458 | -19.383411 | -19.154598 | -18.926014 | -18.697647 | 9.6 |
| -19.703669 | -19.476085 | -19.248766 | -19.021703 | -18.794885 | -18.568305 | -18.341952 | 9.4 |
| -19.334940 | -19.109357 | -18.884051 | -18.659010 | -18.434226 | -18.209688 | -17.985387 | 9.2 |
| -18.965069 | -18.741526 | -18.518270 | -18.295292 | -18.072580 | -17.850125 | -17.627918 | 9.0 |
| -18.594011 | -18.372545 | -18.151379 | -17.930504 | -17.709906 | -17.489576 | -17.269504 | 8.8 |
| -18.221713 | -18.002366 | -17.783332 | -17.564600 | -17.346159 | -17.127998 | -16.910105 | 8.6 |
| -17.848123 | -17.630937 | -17.414077 | -17.197532 | -16.981292 | -16.765344 | -16.549677 | 8.4 |
| -17.473184 | -17.258201 | -17.043559 | -16.829248 | -16.615254 | -16.401566 | -16.188172 | 8.2 |
| -17.096835 | -16.884100 | -16.671722 | -16.459690 | -16.247991 | -16.036611 | -15.825541 | 8.0 |
| -16.719011 | -16.508571 | -16.298505 | -16.088800 | -15.879444 | -15.670425 | -15.461728 | 7.8 |
| -16.339643 | -16.131546 | -15.923842 | -15.716514 | -15.509553 | -15.302945 | -15.096677 | 7.6 |
| -15.958658 | -15.752953 | -15.547660 | -15.342763 | -15.138251 | -14.934110 | -14.730325 | 7.4 |
| -15.575976 | -15.372715 | -15.169886 | -14.967474 | -14.765467 | -14.563849 | -14.362606 | 7.2 |
| -15.191513 | -14.990748 | -14.790438 | -14.590568 | -14.391123 | -14.192088 | -13.993448 | 7.0 |
| -14.805177 | -14.606964 | -14.409229 | -14.211959 | -14.015137 | -13.818747 | -13.622774 | 6.8 |
| -14.416869 | -14.221266 | -14.026168 | -13.831558 | -13.637421 | -13.443740 | -13.250499 | 6.6 |
| -14.026486 | -13.833552 | -13.641150 | -13.449264 | -13.257878 | -13.066973 | -12.876534 | 6.4 |
| -13.633913 | -13.443709 | -13.254067 | -13.064971 | -12.876403 | -12.688345 | -12.500780 | 6.2 |
| -13.239029 | -13.051618 | -12.864801 | -12.678563 | -12.492884 | -12.307746 | -12.123131 | 6.0 |
| -12.841700 | -12.657147 | -12.473224 | -12.289914 | -12.107198 | -11.925056 | -11.743470 | 5.8 |
| -12.441783 | -12.260156 | -12.079198 | -11.898889 | -11.719212 | -11.540146 | -11.361669 | 5.6 |
| -12.039123 | -11.860492 | -11.682570 | -11.505339 | -11.328780 | -11.152871 | -10.977592 | 5.4 |
| -11.633552 | -11.457986 | -11.283176 | -11.109101 | -10.935743 | -10.763078 | -10.591085 | 5.2 |
| -11.224885 | -11.052458 | -10.880836 | -10.709999 | -10.539926 | -10.370595 | -10.201983 | 5.0 |
| -10.812923 | -10.643710 | -10.475355 | -10.307839 | -10.141139 | - 9.975235 | - 9.810100 | 4.8 |
| -10.397450 | -10.231525 | -10.066518 | - 9.902407 | - 9.739173 | - 9.576791 | - 9.415235 | 4.6 |
| - 9.978227 | - 9.815666 | - 9.654088 | - 9.493471 | - 9.333796 | - 9.175034 | - 9.017163 | 4.4 |
| - 9.554996 | - 9.395875 | - 9.237808 | - 9.080774 | - 8.924751 | - 8.769713 | - 8.615636 | 4.2 |
| - 9.127472 | - 8.971867 | - 8.817393 | - 8.664031 | - 8.511757 | - 8.360548 | - 8.210376 | 4.0 |
| - 8.695346 | - 8.543330 | - 8.392531 | - 8.242930 | - 8.094503 | - 7.947227 | - 7.801076 | 3.8 |
| - 8.258277 | - 8.109922 | - 7.962878 | - 7.817124 | - 7.672642 | - 7.529407 | - 7.387392 | 3.6 |
| - 7.815897 | - 7.671267 | - 7.528051 | - 7.386232 | - 7.245789 | - 7.106700 | - 6.968939 | 3.4 |
| - 7.367797 | - 7.226952 | - 7.087634 | - 6.949828 | - 6.813517 | - 6.678677 | - 6.545285 | 3.2 |
| - 6.913534 | - 6.776524 | - 6.641165 | - 6.507445 | - 6.375348 | - 6.244856 | - 6.115946 | 3.0 |
| - 6.452624 | - 6.319486 | - 6.188135 | - 6.058562 | - 5.930756 | - 5.804701 | - 5.680378 | 2.8 |
| - 5.984542 | - 5.855297 | - 5.727985 | - 5.602606 | - 5.479151 | - 5.357610 | - 5.237968 | 2.6 |
| - 5.508717 | - 5.383365 | - 5.260106 | - 5.138946 | - 5.019883 | - 4.902914 | - 4.788031 | 2.4 |
| - 5.024537 | - 4.903050 | - 4.783830 | - 4.666888 | - 4.552233 | - 4.439869 | - 4.329795 | 2.2 |
| - 4.531346 | - 4.413666 | - 4.298436 | - 4.185678 | - 4.075412 | - 3.967650 | - 3.862406 | 2.0 |
| - 4.281156 | - 4.165344 | - 4.052078 | - 3.941388 | - 3.833295 | - 3.727823 | - 3.624986 | 1.9 |
| - 4.028449 | - 3.914474 | - 3.803146 | - 3.694498 | - 3.588560 | - 3.485358 | - 3.384916 | 1.8 |
| - 3.773132 | - 3.660958 | - 3.551533 | - 3.444898 | - 3.341087 | - 3.240133 | - 3.142065 | 1.7 |
| - 3.515110 | - 3.404691 | - 3.297130 | - 3.192472 | - 3.090757 | - 2.992020 | - 2.896298 | 1.6 |
| - 3.254282 | - 3.145566 | - 3.039823 | - 2.937104 | - 2.837448 | - 2.740895 | - 2.647480 | 1.5 |
| - 2.990543 | - 2.883467 | - 2.779491 | - 2.678669 | - 2.581039 | - 2.486630 | - 2.395480 | 1.4 |
| - 2.723776 | - 2.618263 | 2.516000 | - 2.417044 | - 2.321410 | - 2.229113 | - 2.140173 | 1.3 |
| - 2.453846 | - 2.349801 | - 2.249200 | - 2.152087 | - 2.058448 | - 1.968243 | - 1.881460 | 1.2 |
| - 2.180580 | - 2.077880 | - 1.978897 | - 1.883656 | - 1.792056 | - 1.703962 | - 1.619288 | 1.1 |
| - 1.903738 | - 1.802216 | - 1.704840 | - 1.611575 | - 1.522166 | - 1.436284 | - 1.353690 | 1.0 |
| - 1.622945 | - 1.522357 | - 1.426633 | - 1.335624 | - 1.248765 | - 1.165356 | - 1.084867 | 0.9 |
| - 1.337581 | - 1.237541 | - 1.143638 | - 1.055494 | - 0.971948 | - 0.891586 | - 0.813330 | 0.8 |
| - 1.046552 | - 0.946408 | - 0.854746 | - 0.770722 | - 0.692007 | - 0.615845 | - 0.540157 | 0.7 |
| - 0.747868 | - 0.646495 | - 0.557949 | - 0.480571 | - 0.409638 | - 0.339878 | - 0.267462 | 0.6 |
| - 0.437815 | - 0.332830 | - 0.249521 | - 0.183890 | - 0.126363 | - 0.067018 | + 0.000816 | 0.5 |
| - 0.109358 | + 0.004034 | + 0.077600 | + 0.120882 | + 0.154477 | + 0.196575 | 0.257661 | 0.4 |
| + 0.251007 | 0.384665 | 0.436896 | 0.434629 | 0.425377 | 0.439965 | 0.491350 | 0.3 |
| 0.668397 | 0.859229 | 0.853518 | 0.751265 | 0.669346 | 0.645108 | 0.684213 | 0.2 |
| 1.170320 | 1.595017 | 1.354980 | 1.032233 | 0.851663 | 0.786420 | 0.813941 | 0.1 |
| 1.531714 | +∞ | 1.716219 | 1.159421 | 0.921845 | 0.837500 | 0.860047 | 0.0 |

$$u = \ln|\Gamma(x+iy)| = \Re \ln \Gamma(z)$$

$\longrightarrow x$

| $y$ ↓ \ $x$ | −1.4 | −1.3 | −1.2 | −1.1 | −1.0 | −0.9 | −0.8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 10.0 | -19.174481 | -18.942577 | -18.710848 | -18.479285 | -18.247878 | -18.016617 | -17.785495 |
| 9.8 | -18.822367 | -18.592418 | -18.362648 | -18.133053 | -17.903618 | -17.674338 | -17.445200 |
| 9.6 | -18.469489 | -18.241531 | -18.013760 | -17.786170 | -17.558747 | -17.331484 | -17.104371 |
| 9.4 | -18.115815 | -17.889886 | -17.664153 | -17.438608 | -17.213238 | -16.988035 | -16.762987 |
| 9.2 | -17.761313 | -17.537453 | -17.313800 | -17.090341 | -16.867066 | -16.643964 | -16.421024 |
| 9.0 | -17.405946 | -17.184199 | -16.962667 | -16.741337 | -16.520200 | -16.299244 | -16.078457 |
| 8.8 | -17.049679 | -16.830088 | -16.610721 | -16.391567 | -16.172612 | -15.953846 | -15.735258 |
| 8.6 | -16.692471 | -16.475081 | -16.257926 | -16.040992 | -15.824268 | -15.607742 | -15.391401 |
| 8.4 | -16.334280 | -16.119139 | -15.904243 | -15.689579 | -15.475135 | -15.260897 | -15.046853 |
| 8.2 | -15.975061 | -15.762218 | -15.549631 | -15.337287 | -15.125174 | -14.913277 | -14.701583 |
| 8.0 | -15.614765 | -15.404271 | -15.194046 | -14.984076 | -14.774346 | -14.564844 | -14.355556 |
| 7.8 | -15.253341 | -15.045249 | -14.837440 | -14.629898 | -14.422610 | -14.215561 | -14.008734 |
| 7.6 | -14.890733 | -14.685101 | -14.479763 | -14.274707 | -14.069918 | -13.865381 | -13.661077 |
| 7.4 | -14.526862 | -14.323766 | -14.120960 | -13.918451 | -13.716223 | -13.514259 | -13.312542 |
| 7.2 | -14.161723 | -13.961184 | -13.760973 | -13.561073 | -13.361470 | -13.162145 | -12.963081 |
| 7.0 | -13.795187 | -13.597289 | -13.399737 | -13.202514 | -13.005602 | -12.808985 | -12.612643 |
| 6.8 | -13.427201 | -13.232017 | -13.037184 | -12.842707 | -12.648558 | -12.454720 | -12.261175 |
| 6.6 | -13.057682 | -12.865267 | -12.673240 | -12.481581 | -12.290270 | -12.099289 | -11.908616 |
| 6.4 | -12.686543 | -12.496970 | -12.307825 | -12.119060 | -11.930665 | -11.742620 | -11.554902 |
| 6.2 | -12.313690 | -12.127052 | -11.940850 | -11.755060 | -11.569664 | -11.384638 | -11.199960 |
| 6.0 | -11.939019 | -11.755388 | -11.572219 | -11.389490 | -11.207178 | -11.025261 | -10.843714 |
| 5.8 | -11.562417 | -11.381878 | -11.201830 | -11.027249 | -10.843113 | -10.664399 | -10.486080 |
| 5.6 | -11.183762 | -11.006402 | -10.829566 | -10.653228 | -10.477366 | -10.301952 | -10.126962 |
| 5.4 | -10.802920 | -10.628831 | -10.455302 | -10.282307 | -10.109819 | - 9.937813 | - 9.766260 |
| 5.2 | -10.419742 | -10.249022 | -10.078901 | - 9.903521 | - 9.740348 | - 9.571859 | - 9.403857 |
| 5.0 | -10.034065 | - 9.866817 | - 9.700210 | - 9.534217 | - 9.368810 | - 9.203958 | - 9.039630 |
| 4.8 | - 9.645711 | - 9.482041 | - 9.319060 | - 9.156740 | - 8.995051 | - 8.833961 | - 8.673435 |
| 4.6 | - 9.254481 | - 9.094500 | - 8.935264 | - 8.776740 | - 8.618897 | - 8.461701 | - 8.305116 |
| 4.4 | - 8.860156 | - 8.703982 | - 8.548613 | - 8.394015 | - 8.240154 | - 8.086993 | - 7.934496 |
| 4.2 | - 8.462490 | - 8.310247 | - 8.158875 | - 8.008340 | - 7.858603 | - 7.709630 | - 7.561378 |
| 4.0 | - 8.061213 | - 7.913028 | - 7.765789 | - 7.619459 | - 7.474001 | - 7.329373 | - 7.185535 |
| 3.8 | - 7.656019 | - 7.512026 | - 7.369062 | - 7.227089 | - 7.086069 | - 6.945958 | - 6.806713 |
| 3.6 | - 7.246568 | - 7.106903 | - 6.968362 | - 6.830904 | - 6.694493 | - 6.559081 | - 6.424619 |
| 3.4 | - 6.832476 | - 6.697280 | - 6.563315 | - 6.430541 | - 6.298915 | - 6.168391 | - 6.038918 |
| 3.2 | - 6.413313 | - 6.282729 | - 6.153497 | - 6.025777 | - 5.898925 | - 5.773491 | - 5.649225 |
| 3.0 | - 5.988592 | - 5.862763 | - 5.738423 | - 5.615533 | - 5.494049 | - 5.373920 | - 5.255090 |
| 2.8 | - 5.557764 | - 5.436829 | - 5.317541 | - 5.199861 | - 5.083744 | - 4.969140 | - 4.855991 |
| 2.6 | - 5.120207 | - 5.004300 | - 4.890219 | - 4.777926 | - 4.667379 | - 4.558526 | - 4.451314 |
| 2.4 | - 4.675219 | - 4.564461 | - 4.455730 | - 4.348996 | - 4.244218 | - 4.141350 | - 4.040334 |
| 2.2 | - 4.222009 | - 4.116497 | - 4.013244 | - 3.912225 | - 3.813407 | - 3.716747 | - 3.622192 |
| 2.0 | - 3.759685 | - 3.659487 | - 3.561809 | - 3.466635 | - 3.373945 | - 3.283704 | - 3.195867 |
| 1.9 | - 3.524799 | - 3.427270 | - 3.332401 | - 3.240187 | - 3.150612 | - 3.063651 | - 2.979263 |
| 1.8 | - 3.287255 | - 3.192391 | - 3.100337 | - 3.011096 | - 2.924664 | - 2.841022 | - 2.760137 |
| 1.7 | - 3.046912 | - 2.954701 | - 2.865457 | - 2.779195 | - 2.695922 | - 2.615632 | - 2.538300 |
| 1.6 | - 2.805627 | - 2.714045 | - 2.627593 | - 2.544302 | - 2.464196 | - 2.387281 | - 2.313543 |
| 1.5 | - 2.557251 | - 2.470260 | - 2.386565 | - 2.306222 | - 2.229276 | - 2.155749 | - 2.085639 |
| 1.4 | - 2.307638 | - 2.223177 | - 2.142183 | - 2.064743 | - 1.990931 | - 1.920793 | - 1.854340 |
| 1.3 | - 2.054646 | - 1.972628 | - 1.894243 | - 1.819632 | - 1.748908 | - 1.682147 | - 1.619374 |
| 1.2 | - 1.798151 | - 1.718445 | - 1.642532 | - 1.570625 | - 1.502911 | - 1.439505 | - 1.380438 |
| 1.1 | - 1.538065 | - 1.460472 | - 1.386808 | - 1.317414 | - 1.252590 | - 1.192510 | - 1.137204 |
| 1.0 | - 1.274369 | - 1.198580 | - 1.126804 | - 1.059613 | - 0.997497 | - 0.940726 | - 0.889293 |
| 0.9 | - 1.007182 | - 0.932691 | - 0.862202 | - 0.796696 | - 0.737008 | - 0.683563 | - 0.636266 |
| 0.8 | - 0.736872 | - 0.662831 | - 0.592594 | - 0.527887 | - 0.470183 | - 0.420179 | - 0.377576 |
| 0.7 | - 0.464284 | - 0.389228 | - 0.317410 | - 0.251935 | - 0.195482 | - 0.149252 | - 0.112518 |
| 0.6 | - 0.191128 | - 0.112511 | - 0.035816 | + 0.033306 | + 0.089741 | + 0.131434 | + 0.159896 |
| 0.5 | + 0.079293 | + 0.165859 | 0.253437 | 0.331692 | 0.390630 | 0.425813 | 0.441061 |
| 0.4 | 0.340849 | 0.442599 | 0.551997 | 0.650399 | 0.716791 | 0.741137 | 0.732770 |
| 0.3 | 0.582628 | 0.710241 | 0.860824 | 1.003045 | 1.088938 | 1.091062 | 1.036115 |
| 0.2 | 0.786604 | 0.951876 | 1.173899 | 1.414850 | 1.557351 | 1.500882 | 1.345187 |
| 0.1 | 0.927208 | 1.132782 | 1.452710 | 1.913390 | 2.289412 | 1.998217 | 1.621560 |
| 0.0 | 0.978052 | 1.202476 | 1.579176 | 2.273651 | +∞ | 2.358073 | 1.747207 |

$$u = \ln|\Gamma(x+iy)| = \Re \ln \Gamma(z)$$

$\longrightarrow x$

| −0.7 | −0.6 | −0.5 | −0.4 | −0.3 | −0.2 | −0.1 | $y$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| -17.554501 | -17.323625 | -17.092858 | -16.862191 | -16.631612 | -16.401114 | -16.170686 | 10.0 |
| -17.216195 | 16.987315 | -16.758548 | -16.529883 | -16.301314 | -16.072824 | -15.844410 | 9.8 |
| -16.877396 | -16.650552 | -16.423824 | -16.197204 | -15.970682 | -15.744244 | -15.517885 | 9.6 |
| -16.538084 | -16.313315 | -16.088669 | -15.864136 | -15.639704 | -15.415361 | -15.191097 | 9.4 |
| -16.198235 | -15.975586 | -15.753066 | -15.530663 | -15.308365 | -15.086161 | -14.864[illegible] | 9.2 |
| -15.857827 | -15.637343 | -15.416994 | -15.196767 | -14.976650 | -14.756631 | -14.536699 | 9.0 |
| -15.516834 | 15.298563 | -15.080432 | -14.862430 | -14.644542 | -14.426757 | -14.209063 | 8.8 |
| -15.175231 | -14.959222 | -14.743559 | -14.527631 | -14.312023 | -14.096522 | -13.881116 | 8.6 |
| -14.832989 | -14.619293 | -14.405751 | -14.192349 | -13.979073 | -13.765910 | -13.552846 | 8.4 |
| -14.490078 | -14.278749 | -14.067581 | -13.856560 | -13.645672 | -13.434902 | -13.224236 | 8.2 |
| -14.146466 | -13.937560 | -13.728823 | -13.520241 | -13.311798 | -13.103479 | -12.895269 | 8.0 |
| -13.802117 | -13.595693 | -13.389447 | -13.183364 | -12.977426 | -12.771620 | -12.565928 | 7.8 |
| -13.456994 | -13.253114 | -13.049421 | -12.845900 | -12.642532 | -12.439302 | -12.236192 | 7.6 |
| -13.111056 | -12.909785 | -12.708712 | -12.507819 | -12.307088 | -12.106502 | -11.906043 | 7.4 |
| -12.764261 | -12.565667 | -12.367282 | -12.169086 | -11.971063 | -11.773192 | -11.575456 | 7.2 |
| -12.416560 | -12.220715 | -12.025090 | -11.829667 | -11.634425 | -11.439345 | -11.244407 | 7.0 |
| -12.067902 | -11.874882 | -11.682095 | -11.489521 | -11.297139 | -11.104928 | -10.912869 | 6.8 |
| -11.718233 | -11.528116 | -11.338248 | -11.148606 | -10.959166 | -10.769909 | -10.580812 | 6.6 |
| -11.367490 | -11.180363 | -10.993498 | -10.806874 | -10.624649 | -10.434250 | -10.248205 | 6.4 |
| -11.015609 | -10.831559 | -10.647789 | -10.464275 | -10.280990 | -10.097912 | - 9.915015 | 6.2 |
| -10.662515 | -10.481638 | -10.301059 | -10.120752 | - 9.940691 | - 9.760850 | - 9.581201 | 6.0 |
| -10.308131 | -10.130527 | - 9.953240 | - 9.776244 | - 9.599511 | - 9.423014 | - 9.246723 | 5.8 |
| - 9.952369 | - 9.778143 | - 9.604258 | - 9.430683 | - 9.257391 | - 9.084351 | - 8.911533 | 5.6 |
| - 9.595131 | - 9.424398 | - 9.254029 | - 9.083994 | - 8.914263 | - 8.744802 | - 8.575579 | 5.4 |
| - 9.236312 | - 9.069191 | - 8.902462 | - 8.736094 | - 8.570051 | - 8.404300 | - 8.238805 | 5.2 |
| - 8.875792 | - 8.712412 | - 8.549456 | - 8.386888 | - 8.224672 | - 8.062771 | - 7.901147 | 5.0 |
| - 8.513439 | - 8.353939 | - 8.194896 | - 8.036273 | - 7.878032 | - 7.720132 | - 7.562532 | 4.8 |
| - 8.149106 | - 7.993631 | - 7.838654 | - 7.684132 | - 7.530025 | - 7.376289 | - 7.222880 | 4.6 |
| - 7.782625 | - 7.631334 | - 7.480585 | - 7.330333 | - 7.180531 | - 7.031137 | - 6.882098 | 4.4 |
| - 7.413807 | - 7.266872 | 7.120527 | - 6.974726 | - 6.829418 | - 6.684555 | - 6.540083 | 4.2 |
| - 7.042441 | - 6.900043 | - 6.758293 | - 6.617140 | - 6.476529 | - 6.336406 | - 6.196714 | 4.0 |
| - 6.668283 | - 6.530621 | - 6.393671 | - 6.257379 | - 6.121686 | - 5.986531 | - 5.851854 | 3.8 |
| - 6.291058 | - 6.158342 | - 6.026415 | - 5.895216 | - 5.764683 | - 5.634748 | - 5.505341 | 3.6 |
| - 5.910442 | - 5.782904 | - 5.656242 | - 5.530391 | - 5.405281 | - 5.280840 | - 5.156992 | 3.4 |
| - 5.526067 | - 5.403955 | - 5.282821 | - 5.162595 | - 5.043201 | - 4.924558 | - 4.806582 | 3.2 |
| - 5.137499 | - 5.021081 | - 4.905762 | - 4.791466 | - 4.678108 | - 4.565601 | - 4.453850 | 3.0 |
| - 4.744234 | - 4.633798 | - 4.524606 | - 4.416572 | - 4.309607 | - 4.203611 | - 4.098479 | 2.8 |
| - 4.345673 | - 4.241529 | - 4.138801 | - 4.037397 | - 3.937216 | - 3.838152 | - 3.740064 | 2.6 |
| - 3.941103 | - 3.843583 | - 3.747685 | - 3.653312 | - 3.560354 | - 3.468690 | - 3.378185 | 2.4 |
| - 3.529679 | - 3.439129 | - 3.350453 | - 3.263547 | - 3.178294 | - 3.094559 | - 3.012196 | 2.2 |
| - 3.110376 | - 3.027155 | - 2.946115 | - 2.867150 | - 2.790132 | - 2.714919 | - 2.641346 | 2.0 |
| - 2.897394 | - 2.817973 | - 2.740911 | - 2.666102 | - 2.593417 | - 2.522707 | - 2.453800 | 1.9 |
| - 2.681962 | 2.606429 | - 2.533452 | - 2.462926 | - 2.394722 | - 2.328688 | - 2.264644 | 1.8 |
| - 2.463885 | - 2.392325 | - 2.323538 | - 2.257422 | - 2.193852 | - 2.132673 | - 2.073701 | 1.7 |
| - 2.242949 | - 2.175442 | - 2.110949 | - 2.049371 | - 1.990586 | - 1.934446 | - 1.880765 | 1.6 |
| - 2.018922 | - 1.955546 | - 1.895442 | - 1.838520 | - 1.784670 | - 1.733752 | - 1.685588 | 1.5 |
| - 1.791550 | - 1.732374 | - 1.676748 | - 1.624592 | - 1.575813 | - 1.530295 | - 1.487878 | 1.4 |
| - 1.560560 | - 1.505653 | - 1.454582 | - 1.407282 | - 1.363690 | - 1.323726 | - 1.287277 | 1.3 |
| - 1.325662 | - 1.275096 | - 1.228647 | - 1.186263 | - 1.147928 | - 1.113637 | 1.083346 | 1.2 |
| - 1.086562 | - 1.040425 | - 0.998654 | - 0.961199 | - 0.928117 | - 0.899528 | - 0.875501 | 1.1 |
| - 0.842961 | - 0.801404 | - 0.764362 | - 0.731775 | - 0.703810 | - 0.680805 | - 0.663117 | 1.0 |
| - 0.594599 | 0.557900 | - 0.525660 | - 0.497759 | - 0.474546 | - 0.456736 | - 0.445147 | 0.9 |
| - 0.341299 | - 0.310010 | - 0.282702 | - 0.259117 | - 0.239897 | - 0.226410 | - 0.220294 | 0.8 |
| - 0.083065 | - 0.058274 | - 0.036178 | - 0.016240 | + 0.000435 | + 0.011350 | + 0.013379 | 0.7 |
| + 0.179690 | + 0.195914 | + 0.212213 | + 0.229655 | 0.246409 | 0.258077 | 0.258843 | 0.6 |
| 0.445748 | 0.449574 | 0.458961 | 0.475789 | 0.497203 | 0.515801 | 0.520911 | 0.5 |
| 0.712047 | 0.696891 | 0.697475 | 0.716557 | 0.750192 | 0.786998 | 0.807804 | 0.4 |
| 0.971339 | 0.927245 | 0.916426 | 0.941547 | 0.998547 | 1.073458 | 1.134228 | 0.3 |
| 1.206847 | 1.122864 | 1.098489 | 1.133178 | 1.225936 | 1.369920 | 1.526421 | 0.2 |
| 1.384019 | 1.258373 | 1.221623 | 1.266225 | 1.398096 | 1.638492 | 2.012815 | 0.1 |
| 1.452473 | 1.307503 | 1.265512 | 1.314525 | 1.464840 | 1.761458 | 2.368961 | 0.0 |

$$u = \ln|\Gamma(x+iy)| = \Re \ln \Gamma(z)$$

$\longrightarrow x$

| $y$ ↑ | 0.0 | 0.1 | 0.2 | 0.3 | 0.4 | 0.5 | 0.6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 10.0 | -15.940317 | -15.709998 | -15.479721 | -15.249472 | -15.019243 | -14.789025 | -14.558807 |
| 9.8 | -15.616057 | -15.387752 | -15.159497 | -14.931268 | -14.703062 | -14.474865 | -14.246669 |
| 9.6 | -15.291588 | -15.065345 | -14.839148 | -14.612982 | -14.386839 | -14.160706 | -13.934573 |
| 9.4 | -14.966902 | -14.742763 | -14.518669 | -14.294609 | -14.070572 | -13.846547 | -13.622522 |
| 9.2 | -14.641989 | -14.419998 | -14.198054 | -13.976145 | -13.754260 | -13.532388 | -13.310515 |
| 9.0 | -14.316841 | -14.097044 | -13.877297 | -13.657587 | -13.437901 | -13.218228 | -12.998556 |
| 8.8 | -13.991445 | -13.773892 | -13.556391 | -13.338929 | -13.121492 | -12.904069 | -12.686646 |
| 8.6 | -13.665791 | -13.450534 | -13.235330 | -13.020167 | -12.805032 | -12.589910 | -12.374788 |
| 8.4 | -13.339866 | -13.126958 | -12.914107 | -12.701297 | -12.488517 | -12.275751 | -12.062985 |
| 8.2 | -13.013658 | -12.803156 | -12.592712 | -12.382314 | -12.171945 | -11.961591 | -11.751238 |
| 8.0 | -12.687153 | -12.479115 | -12.271139 | -12.063211 | -11.855313 | -11.647432 | -11.439551 |
| 7.8 | -12.360335 | -12.154824 | -11.949378 | -11.743982 | -11.538619 | -11.333273 | -11.127927 |
| 7.6 | -12.033188 | -11.830270 | -11.627419 | -11.424622 | -11.221859 | -11.019113 | -10.816368 |
| 7.4 | -11.705694 | -11.505437 | -11.305252 | -11.105122 | -10.905029 | -10.704954 | -10.504880 |
| 7.2 | -11.377836 | -11.180312 | -10.982865 | -10.785476 | -10.588126 | -10.390795 | -10.193464 |
| 7.0 | -11.049591 | -10.854877 | -10.660245 | -10.465674 | -10.271145 | -10.076636 | - 9.882127 |
| 6.8 | -10.720938 | -10.529115 | -10.337380 | -10.145709 | - 9.954082 | - 9.762476 | - 9.570871 |
| 6.6 | -10.391852 | -10.203007 | -10.014254 | - 9.825570 | - 9.636932 | - 9.448317 | - 9.259703 |
| 6.4 | -10.062307 | - 9.876530 | - 9.690651 | - 9.505246 | - 9.319689 | - 9.134158 | - 8.948627 |
| 6.2 | - 9.732273 | - 9.549662 | - 9.367155 | - 9.184726 | - 9.002349 | - 8.819999 | - 8.637649 |
| 6.0 | - 9.401719 | - 9.222376 | - 9.043144 | - 8.863996 | - 8.684904 | - 8.505839 | - 8.326775 |
| 5.8 | - 9.070609 | - 8.894644 | - 8.718798 | - 8.543043 | - 8.367347 | - 8.191680 | - 8.016014 |
| 5.6 | - 8.738904 | - 8.566435 | - 8.394094 | - 8.221850 | - 8.049670 | - 7.877521 | - 7.705372 |
| 5.4 | - 8.406561 | - 8.237714 | - 8.069005 | - 7.900400 | - 7.731864 | - 7.563362 | - 7.394860 |
| 5.2 | - 8.073532 | - 7.908443 | - 7.743502 | - 7.578674 | - 7.413919 | - 7.249202 | - 7.084485 |
| 5.0 | - 7.739762 | - 7.578577 | - 7.417553 | - 7.256649 | - 7.095826 | - 6.935043 | - 6.774260 |
| 4.8 | - 7.405192 | - 7.248069 | - 7.091119 | - 6.934301 | - 6.777571 | - 6.620884 | - 6.464197 |
| 4.6 | - 7.069753 | - 6.926862 | - 6.764161 | - 6.611603 | - 6.459140 | - 6.306725 | - 6.154309 |
| 4.4 | - 6.733368 | - 6.584895 | - 6.436630 | - 6.288523 | - 6.140518 | - 5.992565 | - 5.844613 |
| 4.2 | - 6.395948 | - 6.252097 | - 6.108474 | - 5.965023 | - 5.821686 | - 5.678406 | - 5.535126 |
| 4.0 | - 6.057394 | - 5.918386 | - 5.779630 | - 5.641064 | - 5.502624 | - 5.364247 | - 5.225870 |
| 3.8 | - 5.717588 | - 5.583668 | - 5.450028 | - 5.316597 | - 5.183307 | - 5.050088 | - 4.916868 |
| 3.6 | - 5.376395 | - 5.247835 | - 5.119584 | - 4.991568 | - 4.863709 | - 4.735928 | - 4.608148 |
| 3.4 | - 5.033657 | - 4.910754 | - 4.788200 | - 4.665910 | - 4.543795 | - 4.421769 | - 4.299743 |
| 3.2 | - 4.689185 | - 4.572276 | - 4.455762 | - 4.339545 | - 4.223528 | - 4.107610 | - 3.991692 |
| 3.0 | - 4.342757 | - 4.232219 | - 4.122130 | - 4.012380 | - 3.902858 | - 3.793450 | - 3.684043 |
| 2.8 | - 3.994101 | - 3.890360 | - 3.787136 | - 3.684302 | - 3.581731 | - 3.479291 | - 3.376852 |
| 2.6 | - 3.642888 | - 3.546430 | - 3.450574 | - 3.355172 | - 3.260075 | - 3.165132 | - 3.070189 |
| 2.4 | - 3.288707 | - 3.200093 | - 3.112185 | - 3.024813 | - 2.937802 | - 2.850973 | - 2.764144 |
| 2.2 | - 2.931042 | - 2.850919 | - 2.771640 | - 2.693003 | - 2.614799 | - 2.536814 | - 2.458828 |
| 2.0 | - 2.569226 | - 2.498356 | - 2.428510 | - 2.359450 | - 2.290919 | - 2.222656 | - 2.154392 |
| 1.9 | - 2.386498 | - 2.320581 | - 2.255804 | - 2.191900 | - 2.128590 | - 2.065578 | - 2.002564 |
| 1.8 | - 2.202382 | - 2.141663 | - 2.082220 | - 2.023758 | - 1.965962 | - 1.908501 | - 1.851038 |
| 1.7 | - 2.016718 | - 1.961466 | - 1.907651 | - 1.854947 | - 1.802997 | - 1.751427 | - 1.699852 |
| 1.6 | - 1.829416 | - 1.779824 | - 1.731968 | - 1.685378 | - 1.639651 | - 1.594357 | - 1.549055 |
| 1.5 | - 1.639948 | - 1.596541 | - 1.555011 | - 1.514943 | - 1.475871 | - 1.437296 | - 1.398706 |
| 1.4 | - 1.448337 | - 1.411369 | - 1.376584 | - 1.343506 | - 1.311591 | - 1.280252 | - 1.248884 |
| 1.3 | - 1.254137 | - 1.224001 | - 1.196440 | - 1.170898 | - 1.146733 | - 1.123238 | - 1.099690 |
| 1.2 | - 1.056912 | - 1.034040 | - 1.014254 | - 0.996904 | - 0.981202 | - 0.966283 | - 0.951262 |
| 1.1 | - 0.856094 | - 0.840964 | - 0.829611 | - 0.821248 | - 0.814887 | - 0.809435 | - 0.803794 |
| 1.0 | - 0.650923 | - 0.644062 | - 0.641945 | - 0.643573 | - 0.647661 | - 0.652791 | - 0.657565 |
| 0.9 | - 0.440345 | - 0.442350 | - 0.450484 | - 0.463417 | - 0.479398 | - 0.496525 | - 0.512988 |
| 0.8 | - 0.222835 | - 0.234397 | - 0.254146 | - 0.280190 | - 0.310010 | - 0.340969 | - 0.370688 |
| 0.7 | + 0.003906 | - 0.018070 | - 0.051409 | - 0.093170 | - 0.139533 | - 0.186731 | - 0.231631 |
| 0.6 | 0.243536 | + 0.209936 | + 0.159896 | + 0.098430 | - 0.031661 | - 0.034935 | - 0.097308 |
| 0.5 | 0.502202 | 0.454947 | 0.382794 | 0.295196 | 0.202426 | + 0.112387 | + 0.029990 |
| 0.4 | 0.791001 | 0.725708 | 0.621198 | 0.496656 | 0.369928 | 0.251676 | 0.146840 |
| 0.3 | 1.132027 | 1.038382 | 0.878759 | 0.698969 | 0.527991 | 0.377021 | 0.248400 |
| 0.2 | 1.576962 | 1.419623 | 1.152355 | 0.889408 | 0.664718 | 0.479552 | 0.328459 |
| 0.1 | 2.294387 | 1.898991 | 1.406169 | 1.037456 | 0.761246 | 0.548086 | 0.380247 |
| 0.0 | +∞ | 2.252712 | 1.524064 | 1.095798 | 0.796678 | 0.572365 | 0.398234 |

$$u=\ln|\Gamma(x+iy)|=\Re\ln\Gamma(z)$$

$\longrightarrow x$

| 0.7 | 0.8 | 0.9 | 1.0 | 1.1 | 1.2 | 1.3 | $y$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| -14.328578 | -14.098329 | -13.868051 | -13.637732 | -13.407363 | -13.176935 | -12.946437 | 10.0 |
| -14.018463 | -13.790234 | -13.561976 | -13.333674 | -13.105318 | -12.876906 | -12.648417 | 9.8 |
| -13.708431 | -13.482264 | -13.256067 | -13.029825 | -12.803528 | -12.577168 | -12.350730 | 9.6 |
| -13.398485 | -13.174425 | -12.950331 | -12.726192 | -12.501996 | -12.277733 | -12.053390 | 9.4 |
| -13.088630 | -12.866721 | -12.644777 | -12.422786 | -12.200736 | -11.978614 | -11.756410 | 9.2 |
| -12.778870 | -12.559160 | -12.339413 | -12.119616 | -11.899758 | -11.679826 | -11.459807 | 9.0 |
| -12.469209 | -12.251747 | -12.034246 | -11.816693 | -11.599076 | -11.381382 | -11.163596 | 8.8 |
| -12.159652 | -11.944489 | -11.729286 | -11.514029 | -11.298704 | -11.083298 | -10.867797 | 8.6 |
| -11.850204 | -11.637395 | -11.424543 | -11.211635 | -10.998656 | -10.785592 | -10.572428 | 8.4 |
| -11.540869 | -11.330470 | -11.120027 | -10.909524 | -10.698947 | -10.488280 | -10.277511 | 8.2 |
| -11.231653 | -11.023725 | -10.815750 | -10.607711 | -10.399595 | -10.191385 | -9.983067 | 8.0 |
| -10.922563 | -10.717168 | -10.511722 | -10.306211 | -10.100618 | -9.894926 | -9.689119 | 7.8 |
| -10.613606 | -10.410808 | -10.207957 | -10.005039 | -9.802035 | -9.598925 | -9.395695 | 7.6 |
| -10.304787 | -10.104657 | -9.904471 | -9.704214 | -9.503866 | -9.303407 | -9.102821 | 7.4 |
| -9.996114 | -9.798725 | -9.601278 | -9.403755 | -9.206134 | -9.008398 | -8.810527 | 7.2 |
| -9.687597 | -9.493027 | -9.298395 | -9.103681 | -8.908864 | -8.713927 | -8.518847 | 7.0 |
| -9.379244 | -9.187573 | -8.995838 | -8.804015 | -8.612084 | -8.420025 | -8.227814 | 6.8 |
| -9.071065 | -8.882381 | -8.693627 | -8.504782 | -8.315822 | -8.126725 | -7.937468 | 6.6 |
| -8.763070 | -8.577464 | -8.391785 | -8.206009 | -8.020110 | -7.834065 | -7.647851 | 6.4 |
| -8.455272 | -8.272843 | -8.090335 | -7.907724 | -7.724983 | -7.542085 | -7.359007 | 6.2 |
| -8.147683 | -7.968535 | -7.789303 | -7.609960 | -7.430477 | -7.250829 | -7.070988 | 6.0 |
| -7.840318 | -7.664562 | -7.488716 | -7.312751 | -7.136638 | -6.960346 | -6.783849 | 5.8 |
| -7.533192 | -7.360947 | -7.188607 | -7.016138 | -6.843509 | -6.670690 | -6.497650 | 5.6 |
| -7.226323 | -7.057718 | -6.889009 | -6.720162 | -6.551144 | -6.381921 | -6.212461 | 5.4 |
| -6.919731 | -6.754902 | -6.589962 | -6.424873 | -6.259599 | -6.094105 | -5.928354 | 5.2 |
| -6.613438 | -6.452534 | -6.291509 | -6.130324 | -5.968939 | -5.807315 | -5.645414 | 5.0 |
| -6.307467 | -6.150648 | -5.993699 | -5.836576 | -5.679236 | -5.521636 | -5.363735 | 4.8 |
| -6.001846 | -5.849288 | -5.696587 | -5.543696 | -5.390569 | -5.237160 | -5.083424 | 4.6 |
| -5.696608 | -5.548500 | -5.400236 | -5.251763 | -5.103032 | -4.953994 | -4.804599 | 4.4 |
| -5.391789 | -5.248338 | -5.104715 | -4.960864 | -4.816729 | -4.672257 | -4.527394 | 4.2 |
| -5.087430 | -4.948863 | -4.810107 | -4.671100 | -4.531780 | -4.392087 | -4.251965 | 4.0 |
| -4.783578 | -4.650147 | -4.516507 | -4.382587 | -4.248321 | -4.113644 | -3.978489 | 3.8 |
| -4.480288 | -4.352273 | -4.224021 | -4.095461 | -3.966516 | -3.837109 | -3.707174 | 3.6 |
| -4.177628 | -4.055338 | -3.932784 | -3.809881 | -3.686546 | -3.562698 | -3.438257 | 3.4 |
| -3.875674 | -3.759458 | -3.642943 | -3.526034 | -3.408637 | -3.290661 | -3.172019 | 3.2 |
| -3.574521 | -3.464771 | -3.354682 | -3.244144 | -3.130513 | -3.021300 | -2.908793 | 3.0 |
| -3.274280 | -3.171447 | 3.068222 | -2.964481 | -2.860104 | -2.754972 | -2.648976 | 2.8 |
| -2.975092 | -2.879690 | -2.783833 | -2.687376 | -2.590179 | -2.492112 | -2.393047 | 2.6 |
| -2.677133 | -2.589761 | -2.501852 | -2.413238 | -2.323757 | -2.233256 | -2.141592 | 2.4 |
| -2.380624 | -2.301987 | -2.222707 | -2.142584 | -2.061430 | -1.979067 | -1.895334 | 2.2 |
| -2.085860 | -2.016797 | -1.946950 | -1.876079 | -1.803960 | -1.730388 | -1.655177 | 2.0 |
| -1.939251 | -1.875343 | -1.810563 | -1.744644 | -1.677344 | -1.608440 | -1.537734 | 1.9 |
| -1.793235 | -1.734766 | -1.675317 | -1.614595 | -1.552336 | -1.488298 | -1.422272 | 1.8 |
| -1.647890 | -1.595172 | -1.541346 | -1.486090 | -1.429111 | -1.370150 | -1.308986 | 1.7 |
| -1.503306 | -1.456690 | -1.408812 | -1.359312 | -1.307872 | -1.254212 | -1.198099 | 1.6 |
| -1.359594 | -1.319476 | -1.277906 | -1.234483 | -1.188859 | -1.140735 | -1.089867 | 1.5 |
| -1.216893 | -1.183722 | -1.148861 | -1.111865 | -1.072353 | -1.030011 | -0.984586 | 1.4 |
| -1.075383 | -1.049666 | -1.021963 | -0.991773 | -0.958687 | -0.922380 | -0.882591 | 1.3 |
| -0.935294 | -0.917616 | -0.897564 | -0.874590 | -0.848259 | -0.818233 | -0.784270 | 1.2 |
| -0.796985 | -0.787956 | -0.776105 | -0.760784 | -0.741538 | -0.718039 | -0.690066 | 1.1 |
| -0.660721 | -0.661195 | -0.658142 | -0.650923 | -0.639087 | -0.622335 | -0.600484 | 1.0 |
| -0.527226 | -0.537996 | -0.544373 | -0.545705 | -0.541575 | -0.531743 | -0.516097 | 0.9 |
| -0.397252 | -0.419241 | -0.435685 | -0.445979 | -0.449788 | -0.446977 | -0.437545 | 0.8 |
| -0.271929 | -0.306090 | -0.333194 | -0.352769 | -0.364644 | -0.368848 | -0.365534 | 0.7 |
| -0.152845 | -0.200068 | -0.238283 | -0.267290 | -0.287190 | -0.298250 | -0.300823 | 0.6 |
| -0.042202 | -0.103136 | -0.152626 | -0.190946 | -0.218590 | -0.236143 | -0.244209 | 0.5 |
| +0.057045 | -0.017720 | -0.078174 | -0.125289 | -0.160071 | -0.183521 | -0.196491 | 0.4 |
| 0.141156 | +0.053348 | -0.017065 | -0.071946 | -0.112910 | -0.141351 | -0.158431 | 0.3 |
| 0.205826 | 0.107056 | +0.028555 | -0.032476 | -0.078244 | -0.110509 | -0.130702 | 0.2 |
| 0.246803 | 0.140626 | 0.056804 | -0.008198 | -0.057020 | -0.091697 | -0.113836 | 0.1 |
| 0.260867 | 0.152060 | 0.066376 | 0.000000 | -0.049873 | -0.085374 | -0.108175 | 0.0 |

$$u=\ln|\Gamma(x+iy)|=\Re\ln\Gamma(z)$$

$\longrightarrow x$

| $y$ ↓ | 1.4 | 1.5 | 1.6 | 1.7 | 1.8 | 1.9 | 2.0 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 10.0 | -12.715858 | -12.485191 | -12.254425 | -12.023548 | -11.792554 | -11.561432 | -11.330172 |
| 9.8 | -12.419848 | -12.191183 | -11.962416 | -11.733536 | -11.504531 | -11.275394 | -11.046113 |
| 9.6 | -12.124209 | -11.897589 | -11.670861 | -11.444016 | -11.217041 | -10.989930 | -10.762665 |
| 9.4 | -11.828958 | -11.604425 | -11.379779 | -11.155010 | -10.930107 | -10.705059 | -10.479856 |
| 9.2 | -11.534112 | -11.311710 | -11.089189 | -10.866540 | -10.643751 | -10.420811 | -10.197710 |
| 9.0 | -11.239690 | -11.019463 | -10.799114 | -10.578630 | -10.358000 | -10.137213 | - 9.916257 |
| 8.8 | -10.945709 | -10.727706 | -10.509575 | -10.291304 | -10.072880 | - 9.854292 | - 9.635526 |
| 8.6 | -10.652189 | -10.436460 | -10.220598 | -10.004588 | - 9.788419 | - 9.572078 | - 9.355551 |
| 8.4 | -10.359152 | -10.145751 | - 9.932208 | - 9.718512 | - 9.504648 | - 9.290604 | - 9.076367 |
| 8.2 | -10.066622 | - 9.855602 | - 9.644434 | - 9.433104 | - 9.221600 | - 9.009906 | - 8.798009 |
| 8.0 | - 9.774623 | - 9.566041 | - 9.357305 | - 9.148398 | - 8.939308 | - 8.730020 | - 8.520518 |
| 7.8 | - 9.483182 | - 9.277099 | - 9.070853 | - 8.864429 | - 8.657812 | - 8.450985 | - 8.243936 |
| 7.6 | - 9.192327 | - 8.988806 | - 8.785114 | - 8.581233 | - 8.377150 | - 8.172846 | - 7.968309 |
| 7.4 | - 8.902090 | - 8.701197 | - 8.500123 | - 8.298852 | - 8.097367 | - 7.895650 | - 7.693686 |
| 7.2 | - 8.612504 | - 8.414309 | - 8.215923 | - 8.017329 | - 7.818509 | - 7.619445 | - 7.420121 |
| 7.0 | - 8.323605 | - 8.128181 | - 7.932557 | - 7.736712 | - 7.540628 | - 7.344287 | - 7.147669 |
| 6.8 | - 8.035432 | - 7.842858 | - 7.650071 | - 7.457051 | - 7.263778 | - 7.070233 | - 6.876395 |
| 6.6 | - 7.748029 | - 7.558386 | - 7.368518 | - 7.178402 | - 6.988018 | - 6.797346 | - 6.606364 |
| 6.4 | - 7.461442 | - 7.274818 | - 7.087953 | - 6.900826 | - 6.713414 | - 6.525697 | - 6.337651 |
| 6.2 | - 7.175723 | - 6.992208 | - 6.808438 | - 6.624389 | - 6.440037 | - 6.255360 | - 6.070334 |
| 6.0 | - 6.890927 | - 6.710620 | - 6.530041 | - 6.349164 | - 6.167965 | - 5.986418 | - 5.804501 |
| 5.8 | - 6.607116 | - 6.430120 | - 6.252634 | - 6.075229 | - 5.897281 | - 5.718962 | - 5.540247 |
| 5.6 | - 6.324358 | - 6.150784 | - 5.976898 | - 5.802673 | - 5.628079 | - 5.453089 | - 5.277676 |
| 5.4 | - 6.042729 | - 5.872694 | - 5.702325 | - 5.531592 | - 5.360464 | - 5.188910 | - 5.016904 |
| 5.2 | - 5.762311 | - 5.295942 | - 5.429214 | - 5.262093 | - 5.094547 | - 4.926545 | - 4.758057 |
| 5.0 | - 5.483198 | - 5.320630 | - 5.157674 | - 4.994295 | - 4.830457 | - 4.666128 | - 4.501276 |
| 4.8 | - 5.205494 | - 5.046872 | - 4.887829 | - 4.728329 | - 4.568333 | - 4.407807 | - 4.246716 |
| 4.6 | - 4.929317 | - 4.774796 | - 4.619818 | - 4.464344 | - 4.308333 | - 4.151748 | - 3.994552 |
| 4.4 | - 4.654798 | - 4.504545 | - 4.353796 | - 4.202506 | - 4.050634 | - 3.898137 | - 3.744977 |
| 4.2 | - 4.382086 | - 4.236285 | - 4.089940 | - 3.943005 | - 3.795434 | - 3.647183 | - 3.498209 |
| 4.0 | - 4.111354 | - 3.970200 | - 3.828450 | - 3.686053 | - 3.542959 | - 3.399120 | - 3.254493 |
| 3.8 | - 3.842796 | - 3.706504 | - 3.569554 | - 3.431892 | - 3.293462 | - 3.154217 | - 3.014106 |
| 3.6 | - 3.576640 | - 3.445441 | - 3.313514 | - 3.180799 | - 3.047238 | - 2.912775 | - 2.777363 |
| 3.4 | - 3.313147 | - 3.187296 | - 3.060634 | - 2.933096 | - 2.804620 | - 2.675147 | - 2.544623 |
| 3.2 | - 3.052625 | - 2.932398 | - 2.811265 | - 2.689153 | - 2.565995 | - 2.441728 | - 2.316295 |
| 3.0 | - 2.795435 | - 2.681139 | - 2.565820 | - 2.449401 | - 2.331811 | - 2.212981 | - 2.092852 |
| 2.8 | - 2.542010 | - 2.433977 | - 2.324785 | - 2.214348 | - 2.102591 | - 1.989442 | - 1.874838 |
| 2.6 | - 2.292867 | - 2.191463 | - 2.088735 | - 1.984591 | - 1.878950 | - 1.771736 | - 1.662885 |
| 2.4 | - 2.048634 | - 1.954260 | - 1.858363 | - 1.760842 | - 1.661612 | - 1.560595 | - 1.457727 |
| 2.2 | - 1.810080 | - 1.723175 | - 1.634499 | - 1.543948 | - 1.451434 | - 1.356879 | - 1.260219 |
| 2.0 | - 1.578162 | - 1.499196 | - 1.418156 | - 1.334933 | - 1.249440 | - 1.161601 | - 1.071360 |
| 1.9 | - 1.465053 | - 1.390244 | - 1.313181 | - 1.233757 | - 1.151884 | - 1.067493 | - 0.980530 |
| 1.8 | - 1.354074 | - 1.283550 | - 1.210571 | - 1.135031 | - 1.056849 | - 0.975958 | - 0.892314 |
| 1.7 | - 1.245427 | - 1.179315 | - 1.110524 | - 1.038952 | - 0.966523 | - 0.887180 | - 0.806885 |
| 1.6 | - 1.139335 | - 1.077765 | - 1.013264 | - 0.945735 | - 0.875115 | - 0.801356 | - 0.724432 |
| 1.5 | - 1.036058 | - 0.979151 | - 0.919031 | - 0.855615 | - 0.788848 | - 0.718698 | - 0.645156 |
| 1.4 | - 0.935883 | - 0.883756 | - 0.828101 | - 0.768849 | - 0.705966 | - 0.639437 | - 0.569270 |
| 1.3 | - 0.839140 | - 0.791894 | - 0.740770 | - 0.685721 | - 0.626731 | - 0.563817 | - 0.497002 |
| 1.2 | - 0.746201 | - 0.703918 | - 0.657368 | - 0.606534 | - 0.551432 | - 0.492099 | - 0.428591 |
| 1.1 | - 0.657482 | - 0.620217 | - 0.578256 | - 0.531621 | - 0.480363 | - 0.424556 | - 0.364288 |
| 1.0 | - 0.573451 | - 0.541219 | - 0.503822 | - 0.461333 | - 0.413847 | - 0.361478 | - 0.304350 |
| 0.9 | - 0.494628 | - 0.467391 | - 0.434486 | - 0.396044 | - 0.352214 | - 0.303160 | - 0.249042 |
| 0.8 | - 0.421582 | - 0.399235 | - 0.370688 | - 0.336143 | - 0.295811 | - 0.249904 | - 0.198631 |
| 0.7 | - 0.354925 | - 0.337283 | - 0.312891 | - 0.282030 | - 0.244981 | - 0.202012 | - 0.153381 |
| 0.6 | - 0.295302 | - 0.282084 | - 0.261560 | - 0.234104 | - 0.200068 | - 0.159781 | - 0.113548 |
| 0.5 | - 0.243373 | - 0.234186 | - 0.217158 | - 0.192755 | - 0.161403 | - 0.123492 | - 0.079374 |
| 0.4 | - 0.199789 | - 0.194124 | - 0.180123 | - 0.158347 | - 0.129292 | - 0.093404 | - 0.051079 |
| 0.3 | - 0.165156 | - 0.162384 | - 0.150854 | - 0.131207 | - 0.104008 | - 0.069745 | - 0.028857 |
| 0.2 | - 0.140001 | - 0.139385 | - 0.129686 | - 0.111613 | - 0.085776 | - 0.052704 | - 0.012866 |
| 0.1 | - 0.124732 | - 0.125450 | - 0.116879 | - 0.099759 | - 0.074766 | - 0.042422 | - 0.003223 |
| 0.0 | - 0.119613 | - 0.120782 | - 0.112592 | - 0.095808 | - 0.071084 | - 0.038984 | 0.000000 |

$$u=\ln|\Gamma(x+iy)|=\Re\ln\Gamma(z)$$

$\longrightarrow x$

| 2.1 | 2.2 | 2.3 | 2.4 | 2.5 | 2.6 | 2.7 | $y$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| -11.098764 | -10.867202 | -10.635473 | -10.403568 | -10.171481 | - 9.939201 | - 9.706718 | 10.0 |
| -10.816675 | -10.587083 | -10.357313 | -10.127364 | - 9.897222 | - 9.666880 | - 9.436330 | 9.8 |
| -10.535243 | -10.307653 | -10.079882 | - 9.851923 | - 9.623765 | - 9.395398 | - 9.166815 | 9.6 |
| -10.254486 | -10.028940 | - 9.803208 | - 9.577278 | - 9.351142 | - 9.124789 | - 8.898209 | 9.4 |
| - 9.974435 | - 9.750976 | - 9.527322 | - 9.303463 | - 9.079388 | - 8.855087 | - 8.630549 | 9.2 |
| - 9.695119 | - 9.473790 | - 9.252258 | - 9.030511 | - 8.808539 | - 8.586331 | - 8.363877 | 9.0 |
| - 9.416572 | - 9.197418 | - 8.978050 | - 8.758459 | - 8.538634 | - 8.318562 | - 8.098232 | 8.8 |
| - 9.138828 | - 8.921889 | - 8.704738 | - 8.487349 | - 8.269714 | - 8.051822 | - 7.833661 | 8.6 |
| - 8.861922 | - 8.647258 | - 8.432362 | - 8.217221 | - 8.001824 | - 7.786157 | - 7.570209 | 8.4 |
| - 8.585895 | - 8.373552 | - 8.160965 | - 7.948122 | - 7.735010 | - 7.521617 | - 7.307929 | 8.2 |
| - 8.310788 | - 8.100818 | - 7.890593 | - 7.680099 | - 7.469323 | - 7.258253 | - 7.046874 | 8.0 |
| - 8.036643 | - 7.829105 | - 7.621296 | - 7.413205 | - 7.204818 | - 6.996121 | - 6.787101 | 7.8 |
| - 7.763520 | - 7.558464 | - 7.353127 | - 7.147494 | - 6.941550 | - 6.735282 | - 6.528674 | 7.6 |
| - 7.491458 | - 7.288948 | - 7.086143 | - 6.883027 | - 6.679583 | - 6.475799 | - 6.271657 | 7.4 |
| - 7.220517 | - 7.020617 | - 6.820406 | - 6.619867 | - 6.418984 | - 6.217741 | - 6.016123 | 7.2 |
| - 6.950759 | - 6.753535 | - 6.555982 | - 6.358084 | - 6.159823 | - 5.961184 | - 5.762149 | 7.0 |
| - 6.682249 | - 6.487769 | - 6.292943 | - 6.097752 | - 5.902179 | - 5.706206 | - 5.509816 | 6.8 |
| - 6.415053 | - 6.223394 | - 6.031367 | - 5.838953 | - 5.646135 | - 5.452895 | - 5.259213 | 6.6 |
| - 6.149256 | - 5.960491 | - 5.771337 | - 5.581773 | - 5.391782 | - 5.201343 | - 5.010438 | 6.4 |
| - 5.884937 | - 5.699148 | - 5.512945 | - 5.326308 | - 5.139217 | - 4.951652 | - 4.763595 | 6.2 |
| - 5.622189 | - 5.439459 | - 5.256291 | - 5.072660 | - 4.888548 | - 4.703933 | - 4.518795 | 6.0 |
| - 5.361111 | - 5.181531 | - 5.001483 | - 4.820943 | - 4.639891 | - 4.458304 | - 4.276162 | 5.8 |
| - 5.101813 | - 4.925476 | - 4.748640 | - 4.571280 | - 4.393372 | - 4.214896 | - 4.035830 | 5.6 |
| - 4.844416 | - 4.671421 | - 4.497892 | - 4.323803 | - 4.149131 | - 3.973852 | - 3.797943 | 5.4 |
| - 4.589053 | - 4.419504 | - 4.249383 | - 4.078663 | - 3.907319 | - 3.735327 | - 3.562662 | 5.2 |
| - 4.335869 | - 4.169876 | - 4.003269 | - 3.836021 | - 3.668104 | - 3.499491 | - 3.330160 | 5.0 |
| - 4.085027 | - 3.922708 | - 3.759727 | - 3.596057 | - 3.431667 | - 3.266533 | - 3.100629 | 4.8 |
| - 3.836709 | - 3.678185 | - 3.518949 | - 3.358968 | - 3.198214 | - 3.036659 | - 2.874276 | 4.6 |
| - 3.591154 | - 3.436517 | - 3.281149 | - 3.124975 | - 2.967967 | - 2.810097 | - 2.651335 | 4.4 |
| - 3.348473 | - 3.197937 | - 3.046565 | - 2.894322 | - 2.741177 | - 2.587099 | - 2.432061 | 4.2 |
| - 3.109034 | - 2.962704 | - 2.815465 | - 2.667280 | - 2.518118 | - 2.367946 | - 2.216736 | 4.0 |
| - 2.873086 | - 2.731113 | - 2.588149 | - 2.444156 | - 2.299099 | - 2.152948 | - 2.005672 | 3.8 |
| - 2.640952 | - 2.503495 | - 2.364954 | - 2.225289 | - 2.084465 | - 1.942449 | - 1.799214 | 3.6 |
| - 2.412997 | - 2.280223 | - 2.146258 | - 2.011062 | - 1.874599 | - 1.736838 | - 1.597749 | 3.4 |
| - 2.189642 | - 2.061722 | - 1.932491 | - 1.801907 | - 1.669934 | - 1.536542 | - 1.401703 | 3.2 |
| - 1.971367 | - 1.848478 | - 1.724138 | - 1.598309 | - 1.470955 | - 1.342045 | - 1.211553 | 3.0 |
| - 1.758721 | - 1.641041 | - 1.521753 | - 1.400819 | - 1.278204 | - 1.153882 | - 1.027827 | 2.8 |
| - 1.552337 | - 1.440045 | - 1.325964 | - 1.210057 | - 1.092296 | - 0.972654 | - 0.851112 | 2.6 |
| - 1.352949 | - 1.246215 | - 1.137485 | - 1.026727 | - 0.913915 | - 0.799031 | - 0.682062 | 2.4 |
| - 1.161408 | - 1.060382 | - 0.957130 | - 0.851619 | - 0.743832 | - 0.633759 | - 0.521394 | 2.2 |
| - 0.978670 | - 0.883498 | - 0.785822 | - 0.685626 | - 0.582906 | - 0.477661 | - 0.369898 | 2.0 |
| - 0.890957 | - 0.798746 | - 0.703881 | - 0.606355 | - 0.506169 | - 0.403332 | - 0.297856 | 1.9 |
| - 0.805884 | - 0.716649 | - 0.624603 | - 0.529045 | - 0.432086 | - 0.331642 | - 0.228434 | 1.8 |
| - 0.723617 | - 0.637366 | - 0.548136 | - 0.455937 | - 0.360789 | - 0.262716 | - 0.161750 | 1.7 |
| - 0.644334 | - 0.561065 | - 0.474639 | - 0.385079 | - 0.292416 | - 0.196686 | - 0.097928 | 1.6 |
| - 0.568224 | - 0.487922 | - 0.404277 | - 0.317326 | - 0.227112 | - 0.133683 | - 0.037089 | 1.5 |
| - 0.495487 | - 0.418123 | - 0.337223 | - 0.252837 | - 0.165024 | - 0.073845 | + 0.020640 | 1.4 |
| - 0.426332 | - 0.351863 | - 0.273654 | - 0.191777 | - 0.106304 | - 0.017310 | 0.075129 | 1.3 |
| - 0.360979 | - 0.289338 | - 0.213754 | - 0.134313 | - 0.051105 | + 0.035779 | 0.126250 | 1.2 |
| - 0.299654 | - 0.230760 | - 0.157711 | - 0.080616 | + 0.000417 | 0.085282 | 0.173873 | 1.1 |
| - 0.242591 | - 0.176336 | - 0.105714 | - 0.030857 | 0.048109 | 0.131058 | 0.217872 | 1.0 |
| - 0.190027 | - 0.126278 | - 0.057952 | + 0.014796 | 0.091817 | 0.172970 | 0.258122 | 0.9 |
| - 0.142195 | - 0.080793 | - 0.014611 | 0.056174 | 0.131393 | 0.210887 | 0.294506 | 0.8 |
| - 0.099330 | - 0.040088 | + 0.024129 | 0.093119 | 0.166695 | 0.244680 | 0.326908 | 0.7 |
| - 0.061652 | - 0.004356 | 0.058097 | 0.125482 | 0.197592 | 0.274232 | 0.355223 | 0.6 |
| - 0.029371 | + 0.026221 | 0.087135 | 0.153123 | 0.223959 | 0.299434 | 0.379356 | 0.5 |
| - 0.002665 | 0.051481 | 0.111102 | 0.175919 | 0.245690 | 0.320193 | 0.399224 | 0.4 |
| + 0.018272 | 0.071283 | 0.129876 | 0.193764 | 0.262692 | 0.336426 | 0.414754 | 0.3 |
| - 0.033328 | 0.085512 | 0.143358 | 0.206573 | 0.274891 | 0.348069 | 0.425888 | 0.2 |
| - 0.042405 | 0.094084 | 0.151478 | 0.214285 | 0.282232 | 0.355074 | 0.432597 | 0.1 |
| - 0.045437 | 0.096947 | 0.154190 | 0.216859 | 0.284683 | 0.357412 | 0.434820 | 0.0 |

$$u = \ln|\Gamma(x+iy)| = \Re \ln \Gamma(z)$$

$\longrightarrow x$

| $y$ ↑ | 2.8 | 2.9 | 3.0 | 3.1 | 3.2 | 3.3 | 3.4 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 10.0 | - 9.474026 | - 9.241115 | - 9.007976 | - 8.774602 | - 8.540984 | - 8.307113 | - 8.072982 |
| 9.8 | - 9.205559 | - 8.974562 | - 8.743328 | - 8.511845 | - 8.280117 | - 8.048121 | - 7.815859 |
| 9.6 | - 8.938002 | - 8.708954 | - 8.479659 | - 8.250109 | - 8.020297 | - 7.790212 | - 7.559848 |
| 9.4 | - 8.671391 | - 8.444328 | - 8.217009 | - 7.989425 | - 7.761566 | - 7.533425 | - 7.304993 |
| 9.2 | - 8.405765 | - 8.180725 | - 7.955418 | - 7.729836 | - 7.503968 | - 7.277806 | - 7.051340 |
| 9.0 | - 8.141165 | - 7.918187 | - 7.694931 | - 7.471388 | - 7.247548 | - 7.023401 | - 6.798938 |
| 8.8 | - 7.877634 | - 7.656759 | - 7.435593 | - 7.214128 | - 6.992354 | - 6.770259 | - 6.547836 |
| 8.6 | - 7.615219 | - 7.396487 | - 7.177453 | - 6.958107 | - 6.738438 | - 6.518435 | - 6.298089 |
| 8.4 | - 7.353969 | - 7.137424 | - 6.920565 | - 6.703378 | - 6.485855 | - 6.267983 | - 6.049754 |
| 8.2 | - 7.093935 | - 6.879623 | - 6.664981 | - 6.449999 | - 6.234663 | - 6.018965 | - 5.802892 |
| 8.0 | - 6.835174 | - 6.623142 | - 6.410764 | - 6.198029 | - 5.984926 | - 5.771443 | - 5.557569 |
| 7.8 | - 6.577746 | - 6.368040 | - 6.157974 | - 5.947535 | - 5.736708 | - 5.525485 | - 5.313852 |
| 7.6 | - 6.321713 | - 6.114386 | - 5.906681 | - 5.698584 | - 5.490081 | - 5.281163 | - 5.071816 |
| 7.4 | - 6.067145 | - 5.862249 | - 5.656955 | - 5.451251 | - 5.245121 | - 5.038554 | - 4.831540 |
| 7.2 | - 5.814116 | - 5.611704 | - 5.408875 | - 5.205614 | - 5.001907 | - 4.797742 | - 4.593106 |
| 7.0 | - 5.562704 | - 5.362834 | - 5.162523 | - 4.961758 | - 4.760526 | - 4.558812 | - 4.356604 |
| 6.8 | - 5.312994 | - 5.115724 | - 4.917989 | - 4.719776 | - 4.521072 | - 4.321861 | - 4.122130 |
| 6.6 | - 5.065077 | - 4.870466 | - 4.675368 | - 4.479765 | - 4.283644 | - 4.086990 | - 3.889788 |
| 6.4 | - 4.819052 | - 4.627166 | - 4.434764 | - 4.241830 | - 4.048349 | - 3.854307 | - 3.659687 |
| 6.2 | - 4.575027 | - 4.385930 | - 4.196288 | - 4.006084 | - 3.815303 | - 3.623928 | - 3.431945 |
| 6.0 | - 4.333116 | - 4.146877 | - 3.960061 | - 3.772650 | - 3.584628 | - 3.395981 | - 3.206691 |
| 5.8 | - 4.093446 | - 3.910136 | - 3.726213 | - 3.541660 | - 3.356461 | - 3.170600 | - 2.984060 |
| 5.6 | - 3.856153 | - 3.675844 | - 3.494885 | - 3.313259 | - 3.130947 | - 2.947933 | - 2.764202 |
| 5.4 | - 3.671384 | - 3.444154 | - 3.266232 | - 3.087600 | - 2.908241 | - 2.728138 | - 2.547274 |
| 5.2 | - 3.389304 | - 3.215229 | - 3.040419 | - 2.864354 | - 2.688514 | - 2.511385 | - 2.333449 |
| 5.0 | - 3.160087 | - 2.989250 | - 2.817628 | - 2.645201 | - 2.471952 | - 2.297861 | - 2.122913 |
| 4.8 | - 2.933929 | - 2.766412 | - 2.598058 | - 2.428844 | - 2.258753 | - 2.087766 | - 1.915869 |
| 4.6 | - 2.711042 | - 2.546932 | - 2.381924 | - 2.215999 | - 2.054137 | - 1.881321 | - 1.712533 |
| 4.4 | - 2.491659 | - 2.331043 | - 2.169464 | - 2.006903 | - 1.843341 | - 1.678760 | - 1.513143 |
| 4.2 | - 2.276038 | - 2.119005 | - 1.960937 | - 1.801817 | - 1.641624 | - 1.480342 | - 1.317954 |
| 4.0 | - 2.064463 | - 1.911100 | - 1.756627 | - 1.601022 | - 1.444267 | - 1.286346 | - 1.127244 |
| 3.8 | - 1.857245 | - 1.707644 | - 1.556845 | - 1.404829 | - 1.251579 | - 1.097078 | - 0.941314 |
| 3.6 | - 1.654732 | - 1.508978 | - 1.361934 | - 1.213580 | - 1.063896 | - 0.912871 | - 0.760492 |
| 3.4 | - 1.457306 | - 1.315487 | - 1.172271 | - 1.027641 | - 0.881583 | - 0.734083 | - 0.585131 |
| 3.2 | - 1.265391 | - 1.127586 | - 0.988267 | - 0.847422 | - 0.705038 | - 0.561104 | - 0.415612 |
| 3.0 | - 1.079456 | - 0.945736 | - 0.810377 | - 0.673367 | - 0.534696 | - 0.394358 | - 0.252348 |
| 2.8 | - 0.900021 | - 0.770448 | - 0.639096 | - 0.505958 | - 0.371028 | - 0.234303 | - 0.095784 |
| 2.6 | - 0.727658 | - 0.602278 | - 0.474967 | - 0.345721 | - 0.214543 | - 0.081432 | + 0.053606 |
| 2.4 | - 0.562999 | - 0.441839 | - 0.318580 | - 0.193228 | - 0.065788 | + 0.063730 | 0.195316 |
| 2.2 | - 0.406738 | - 0.289796 | - 0.170575 | - 0.049089 | + 0.074649 | 0.200621 | 0.328808 |
| 2.0 | - 0.259629 | - 0.146870 | - 0.031639 | + 0.086041 | 0.206145 | 0.328647 | 0.453520 |
| 1.9 | - 0.189759 | - 0.079065 | + 0.034201 | 0.150012 | 0.268337 | 0.389145 | 0.512402 |
| 1.8 | - 0.122488 | - 0.013834 | 0.097497 | 0.211469 | 0.328047 | 0.447192 | 0.568868 |
| 1.7 | - 0.057926 | + 0.048722 | 0.158151 | 0.270320 | 0.385188 | 0.502710 | 0.622842 |
| 1.6 | + 0.003814 | 0.108494 | 0.216063 | 0.326474 | 0.439675 | 0.555618 | 0.674252 |
| 1.5 | 0.062617 | 0.165377 | 0.271135 | 0.379854 | 0.491421 | 0.605834 | 0.723019 |
| 1.4 | 0.118363 | 0.219260 | 0.323265 | 0.430313 | 0.540338 | 0.653278 | 0.769070 |
| 1.3 | 0.170938 | 0.270036 | 0.372353 | 0.477812 | 0.586340 | 0.697871 | 0.812330 |
| 1.2 | 0.220217 | 0.317595 | 0.418298 | 0.522242 | 0.629347 | 0.739534 | 0.852728 |
| 1.1 | 0.266089 | 0.361830 | 0.461002 | 0.563511 | 0.669269 | 0.778190 | 0.890192 |
| 1.0 | 0.308435 | 0.402635 | 0.500369 | 0.601534 | 0.706030 | 0.813767 | 0.924655 |
| 0.9 | 0.347144 | 0.439910 | 0.536307 | 0.636222 | 0.739550 | 0.846193 | 0.956053 |
| 0.8 | 0.382107 | 0.473556 | 0.568727 | 0.667499 | 0.769759 | 0.875401 | 0.984323 |
| 0.7 | 0.413223 | 0.503481 | 0.597546 | 0.695288 | 0.796587 | 0.901330 | 1.009410 |
| 0.6 | 0.440399 | 0.529602 | 0.622688 | 0.719521 | 0.819973 | 0.923924 | 1.031263 |
| 0.5 | 0.463548 | 0.551842 | 0.644086 | 0.740136 | 0.839860 | 0.943132 | 1.049835 |
| 0.4 | 0.482595 | 0.570134 | 0.661678 | 0.757091 | 0.856200 | 0.958909 | 1.065087 |
| 0.3 | 0.497479 | 0.584421 | 0.675415 | 0.770310 | 0.868952 | 0.971220 | 1.076985 |
| 0.2 | 0.508146 | 0.594659 | 0.685256 | 0.779780 | 0.878085 | 0.980034 | 1.085502 |
| 0.1 | 0.514562 | 0.600815 | 0.691173 | 0.785475 | 0.883574 | 0.985331 | 1.090621 |
| 0.0 | 0.516703 | 0.602870 | 0.693147 | 0.787375 | 0.885405 | 0.987099 | 1.092328 |

$$u=\ln|\Gamma(x+iy)|=\Re\ln\Gamma(z)$$

$\longrightarrow x$

| 3.5 | 3.6 | 3.7 | 3.8 | 3.9 | 4.0 | 4.1 | $y$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| - 7.838583 | - 7.603909 | - 7.368950 | - 7.133701 | - 6.898155 | - 6.662303 | - 6.426137 | 10.0 |
| - 7.583316 | - 7.350487 | - 7.117366 | - 6.883940 | - 6.650208 | - 6.416157 | - 6.181779 | 9.8 |
| - 7.329194 | - 7.098242 | - 6.866987 | - 6.635416 | - 6.403527 | - 6.171307 | - 5.938975 | 9.6 |
| - 7.076261 | - 6.847219 | - 6.617861 | - 6.388176 | - 6.158159 | - 5.927801 | - 5.697094 | 9.4 |
| - 6.824563 | - 6.597465 | - 6.370036 | - 6.142269 | - 5.914156 | - 5.685689 | - 5.456860 | 9.2 |
| - 6.574150 | - 6.349028 | - 6.123563 | - 5.897747 | - 5.671570 | - 5.445026 | - 5.218106 | 9.0 |
| - 6.325074 | - 6.101964 | - 5.878497 | - 5.654664 | - 5.430458 | - 5.205868 | - 4.980886 | 8.8 |
| - 6.077390 | - 5.856329 | - 5.634895 | - 5.413081 | - 5.190877 | - 4.968274 | - 4.745265 | 8.6 |
| - 5.831156 | - 5.612181 | - 5.392817 | - 5.173057 | - 4.952890 | - 4.732309 | - 4.511303 | 8.4 |
| - 5.586436 | - 5.369584 | - 5.152328 | - 4.934658 | - 4.716565 | - 4.498038 | - 4.279071 | 8.2 |
| - 5.343293 | - 5.128606 | - 4.913496 | - 4.697953 | - 4.481970 | - 4.265534 | - 4.048638 | 8.0 |
| - 5.101800 | - 4.889317 | - 4.676393 | - 4.463016 | - 4.249179 | - 4.034871 | - 3.820083 | 7.8 |
| - 4.862031 | - 4.651794 | - 4.441096 | - 4.229925 | - 4.018272 | - 3.806129 | - 3.59348[illegible] | 7.6 |
| 4.624065 | - 4.416117 | - 4.207687 | - 3.998763 | - 3.789334 | - 3.579392 | - 3.368927 | 7.4 |
| - 4.387987 | - 4.182374 | - 3.976254 | - 3.769618 | - 3.562453 | - 3.354751 | - 3.146502 | 7.2 |
| - 4.153889 | - 3.950655 | - 3.746890 | - 3.542584 | - 3.337724 | - 3.132302 | - 2.926306 | 7.0 |
| - 3.921868 | - 3.721060 | - 3.519695 | - 3.317761 | - 3.115249 | - 2.912145 | - 2.708441 | 6.8 |
| - 3.692027 | - 3.493693 | - 3.294773 | - 3.095257 | - 2.895133 | - 2.694390 | - 2.493018 | 6.6 |
| - 3.464479 | - 3.268668 | - 3.072240 | - 2.875187 | - 2.677494 | - 2.479153 | - 2.2801[illegible]1 | 6.4 |
| - 3.239342 | - 3.046104 | - 2.852217 | - 2.657672 | - 2.462454 | - 2.266555 | - 2.069963 | 6.2 |
| - 3.016746 | - 2.826131 | - 2.634834 | - 2.442843 | - 2.250145 | - 2.056730 | - 1.862587 | 6.0 |
| - 2.796828 | - 2.608889 | - 2.420231 | - 2.230840 | - 2.040706 | - 1.849817 | - 1.658162 | 5.8 |
| - 2.579737 | - 2.394527 | - 2.208556 | - 2.021814 | - 1.834288 | - 1.645966 | - 1.456839 | 5.6 |
| - 2.365634 | - 2.183205 | - 1.999973 | - 1.815925 | - 1.631051 | - 1.445338 | - 1.258777 | 5.4 |
| - 2.154691 | - 1.975096 | - 1.794652 | - 1.613347 | - 1.431167 | - 1.248104 | - 1.064146 | 5.2 |
| - 1.947094 | - 1.770387 | - 1.592782 | - 1.414263 | - 1.234822 | - 1.054448 | - 0.873130 | 5.0 |
| - 1.743044 | - 1.569279 | - 1.394560 | - 1.218874 | - 1.042213 | - 0.864565 | - 0.685922 | 4.8 |
| - 1.542760 | - 1.371987 | - 1.200202 | - 1.027394 | - 0.853551 | - 0.678666 | - 0.502729 | 4.6 |
| - 1.346476 | - 1.178746 | - 1.009940 | - 0.840051 | - 0.669065 | - 0.496974 | - 0.323773 | 4.4 |
| - 1.154447 | - 0.989808 | - 0.824025 | - 0.657092 | - 0.488996 | - 0.319730 | - 0.149289 | 4.2 |
| - 0.966947 | - 0.805444 | - 0.642724 | - 0.478781 | - 0.313604 | - 0.147189 | + 0.020470 | 4.0 |
| - 0.784274 | - 0.625947 | - 0.466325 | - 0.305401 | - 0.143168 | - 0.020377 | 0.185238 | 3.8 |
| - 0.606749 | - 0.451633 | - 0.295137 | - 0.137256 | + 0.022016 | 0.182677 | 0.344731 | 3.6 |
| - 0.434719 | - 0.282841 | - 0.129492 | + 0.025331 | 0.181628 | 0.339403 | 0.498652 | 3.4 |
| - 0.268557 | - 0.119936 | + 0.030254 | 0.182012 | 0.335338 | 0.490228 | 0.646680 | 3.2 |
| - 0.108665 | + 0.036693 | 0.183723 | 0.332423 | 0.482787 | 0.634809 | 0.788482 | 3.0 |
| + 0.044528 | 0.186629 | 0.330513 | 0.476172 | 0.623599 | 0.772782 | 0.923712 | 2.8 |
| 0.190564 | 0.329431 | 0.470199 | 0.612853 | 0.757382 | 0.903770 | 1.052004 | 2.6 |
| 0.328955 | 0.464632 | 0.602332 | 0.742036 | 0.883725 | 1.027380 | 1.172981 | 2.4 |
| 0.459190 | 0.591744 | 0.726447 | 0.863275 | 1.002203 | 1.143206 | 1.286258 | 2.2 |
| 0.580733 | 0.710257 | 0.842061 | 0.976113 | 1.112382 | 1.250836 | 1.391443 | 2.0 |
| 0.638074 | 0.766127 | 0.896525 | 1.029235 | 1.164221 | 1.301446 | 1.440878 | 1.9 |
| 0.693033 | 0.819651 | 0.948680 | 1.080083 | 1.213819 | 1.349852 | 1.488141 | 1.8 |
| 0.745541 | 0.870763 | 0.998462 | 1.128596 | 1.261123 | 1.395999 | 1.533184 | 1.7 |
| 0.795527 | 0.919395 | 1.045808 | 1.174717 | 1.306076 | 1.439839 | 1.575961 | 1.6 |
| 0.842921 | 0.965485 | 1.090658 | 1.218389 | 1.348626 | 1.481319 | 1.616421 | 1.5 |
| 0.887652 | 1.008965 | 1.132952 | 1.259555 | 1.388719 | 1.520391 | 1.654521 | 1.4 |
| 0.929653 | 1.049773 | 1.172629 | 1.298160 | 1.426304 | 1.557007 | 1.690214 | 1.3 |
| 0.968855 | 1.087846 | 1.209632 | 1.334148 | 1.461331 | 1.591120 | 1.723457 | 1.2 |
| 1.005195 | 1.123124 | 1.243906 | 1.367471 | 1.493753 | 1.622686 | 1.754210 | 1.1 |
| 1.038609 | 1.155549 | 1.275397 | 1.398078 | 1.523522 | 1.651662 | 1.782432 | 1.0 |
| 1.069039 | 1.185067 | 1.304054 | 1.425924 | 1.550598 | 1.678006 | 1.808086 | 0.9 |
| 1.096428 | 1.211627 | 1.329832 | 1.450962 | 1.574938 | 1.701687 | 1.831138 | 0.8 |
| 1.120725 | 1.235181 | 1.352686 | 1.473155 | 1.596507 | 1.722665 | 1.851556 | 0.7 |
| 1.141883 | 1.255686 | 1.372576 | 1.492466 | 1.615271 | 1.740911 | 1.869311 | 0.6 |
| 1.159860 | 1.273103 | 1.389468 | 1.508862 | 1.631993 | 1.756398 | 1.884379 | 0.5 |
| 1.174620 | 1.287401 | 1.403331 | 1.522316 | 1.644268 | 1.769101 | 1.896750 | 0.4 |
| 1.186131 | 1.298551 | 1.414141 | 1.532805 | 1.654454 | 1.779003 | 1.906373 | 0.3 |
| 1.194371 | 1.306531 | 1.421876 | 1.540310 | 1.661742 | 1.786086 | 1.913259 | 0.2 |
| 1.199322 | 1.311324 | 1.426534 | 1.544819 | 1.666120 | 1.790341 | 1.917397 | 0.1 |
| 1.200974 | 1.312923 | 1.428072 | 1.546322 | 1.667580 | 1.791760 | 1.918777 | 0.0 |

$$u = \ln|\Gamma(x+iy)| = \Re \ln \Gamma(z)$$

| $y$ \ $x$ | 4.2 | 4.3 | 4.4 | 4.5 | 4.6 | 4.7 | 4.8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 10.0 | - 6.189654 | - 5.952844 | - 5.715701 | - 5.478219 | - 5.240392 | - 5.002213 | - 4.763676 |
| 9.8 | - 5.947078 | - 5.712034 | - 5.476648 | - 5.240910 | - 5.004813 | - 4.768355 | - 4.531523 |
| 9.6 | - 5.705854 | - 5.472605 | - 5.239001 | - 5.005031 | - 4.770691 | - 4.535976 | - 4.300875 |
| 9.4 | - 5.466031 | - 5.234604 | - 5.002808 | - 4.770635 | - 4.538077 | - 4.305129 | - 4.071784 |
| 9.2 | - 5.227662 | - 4.998086 | - 4.768126 | - 4.537775 | - 4.307026 | - 4.075871 | - 3.844305 |
| 9.0 | - 4.990801 | - 4.763105 | - 4.535009 | - 4.306508 | - 4.077594 | - 3.848259 | - 3.618498 |
| 8.8 | - 4.755507 | - 4.529719 | - 4.303517 | - 4.076894 | - 3.849842 | - 3.622354 | - 3.394423 |
| 8.6 | - 4.521840 | - 4.297992 | - 4.073713 | - 3.848997 | - 3.623835 | - 3.398219 | - 3.172145 |
| 8.4 | - 4.289866 | - 4.067989 | - 3.845663 | - 3.622882 | - 3.399638 | - 3.175923 | - 2.951731 |
| 8.2 | - 4.059654 | - 3.839778 | - 3.619436 | - 3.398620 | - 3.177323 | - 2.955536 | - 2.733253 |
| 8.0 | - 3.831274 | - 3.613433 | - 3.395105 | - 3.176284 | - 2.956963 | - 2.737132 | - 2.516786 |
| 7.8 | - 3.604805 | - 3.389030 | - 3.172749 | - 2.955954 | - 2.738638 | - 2.520791 | - 2.302409 |
| 7.6 | - 3.380327 | - 3.166652 | - 2.952450 | - 2.737711 | - 2.522430 | - 2.306597 | - 2.090205 |
| 7.4 | - 3.157927 | - 2.946386 | - 2.734294 | - 2.521644 | - 2.308427 | - 2.094635 | - 1.880262 |
| 7.2 | - 2.937695 | - 2.728322 | - 2.518374 | - 2.307843 | - 2.096721 | - 1.885000 | - 1.672673 |
| 7.0 | - 2.719728 | - 2.512558 | - 2.304787 | - 2.096407 | - 1.887411 | - 1.677789 | - 1.467536 |
| 6.8 | - 2.504129 | - 2.299197 | - 2.093636 | - 1.887440 | - 1.680599 | - 1.473106 | - 1.264954 |
| 6.6 | - 2.291007 | - 2.088348 | - 1.885032 | - 1.681051 | - 1.476396 | - 1.271060 | - 1.065036 |
| 6.4 | - 2.080479 | - 1.880129 | - 1.679090 | - 1.477355 | - 1.274917 | - 1.071766 | - 0.867897 |
| 6.2 | - 1.872668 | - 1.674662 | - 1.475934 | - 1.276478 | - 1.076285 | - 0.875347 | - 0.673659 |
| 6.0 | - 1.667706 | - 1.472078 | - 1.275695 | - 1.078548 | - 0.880630 | - 0.681932 | - 0.482451 |
| 5.8 | - 1.465732 | - 1.272518 | - 1.078512 | - 0.883704 | - 0.688089 | - 0.491658 | - 0.294407 |
| 5.6 | - 1.266896 | - 1.076131 | - 0.884533 | - 0.692094 | - 0.498809 | - 0.304670 | - 0.109672 |
| 5.4 | - 1.071358 | - 0.883073 | - 0.693914 | - 0.503873 | - 0.312943 | - 0.121120 | + 0.071603 |
| 5.2 | - 0.879286 | - 0.693514 | - 0.506823 | - 0.319205 | - 0.130656 | + 0.058830 | 0.249259 |
| 5.0 | - 0.690861 | - 0.507631 | - 0.323436 | - 0.138268 | + 0.047879 | 0.235009 | 0.423127 |
| 4.8 | - 0.506275 | - 0.325616 | - 0.143942 | + 0.038756 | 0.222481 | 0.407237 | 0.593029 |
| 4.6 | - 0.325733 | - 0.147672 | + 0.031460 | 0.211668 | 0.392955 | 0.575325 | 0.758780 |
| 4.4 | - 0.149454 | + 0.025988 | 0.202559 | 0.380261 | 0.559097 | 0.739070 | 0.920180 |
| 4.2 | + 0.022331 | 0.195136 | 0.369131 | 0.544316 | 0.720692 | 0.898263 | 1.077025 |
| 4.0 | 0.189375 | 0.359531 | 0.530939 | 0.703400 | 0.877514 | 1.052681 | 1.229098 |
| 3.8 | 0.351417 | 0.518916 | 0.687734 | 0.857871 | 1.029324 | 1.202093 | 1.376174 |
| 3.6 | 0.508180 | 0.673021 | 0.839252 | 1.006871 | 1.175875 | 1.346258 | 1.518016 |
| 3.4 | 0.659372 | 0.821563 | 0.985218 | 1.150334 | 1.316903 | 1.484921 | 1.654379 |
| 3.2 | 0.804687 | 0.964243 | 1.125343 | 1.287978 | 1.452141 | 1.617821 | 1.785009 |
| 3.0 | 0.943799 | 1.100750 | 1.259325 | 1.419514 | 1.581304 | 1.744685 | 1.909645 |
| 2.8 | 1.076375 | 1.230760 | 1.386853 | 1.544639 | 1.704106 | 1.865237 | 2.028017 |
| 2.6 | 1.202064 | 1.353936 | 1.507603 | 1.663046 | 1.820248 | 1.979190 | 2.139854 |
| 2.4 | 1.320506 | 1.469936 | 1.621247 | 1.774418 | 1.929429 | 2.086255 | 2.244877 |
| 2.2 | 1.431333 | 1.578405 | 1.727449 | 1.878436 | 2.031343 | 2.186142 | 2.342809 |
| 2.0 | 1.534173 | 1.678992 | 1.825872 | 1.974780 | 2.125686 | 2.278561 | 2.433374 |
| 1.9 | 1.582480 | 1.726219 | 1.872061 | 2.019974 | 2.169924 | 2.321879 | 2.475808 |
| 1.8 | 1.628650 | 1.771342 | 1.916181 | 2.063131 | 2.212156 | 2.363224 | 2.516300 |
| 1.7 | 1.672638 | 1.814319 | 1.958190 | 2.104212 | 2.252347 | 2.402561 | 2.554816 |
| 1.6 | 1.714398 | 1.855107 | 1.998049 | 2.143179 | 2.290460 | 2.439855 | 2.591324 |
| 1.5 | 1.753885 | 1.893665 | 2.035716 | 2.179995 | 2.326462 | 2.475074 | 2.625794 |
| 1.4 | 1.791056 | 1.929950 | 2.071155 | 2.214626 | 2.360316 | 2.508187 | 2.658195 |
| 1.3 | 1.825869 | 1.963925 | 2.104329 | 2.247034 | 2.391993 | 2.539163 | 2.688501 |
| 1.2 | 1.858286 | 1.995551 | 2.135202 | 2.277188 | 2.421460 | 2.567972 | 2.716678 |
| 1.1 | 1.888264 | 2.024793 | 2.163741 | 2.305056 | 2.448687 | 2.594586 | 2.742707 |
| 1.0 | 1.915769 | 2.051616 | 2.189913 | 2.330608 | 2.473647 | 2.618980 | 2.766559 |
| 0.9 | 1.940765 | 2.075987 | 2.213690 | 2.353816 | 2.496313 | 2.641129 | 2.788214 |
| 0.8 | 1.963222 | 2.097877 | 2.235041 | 2.374654 | 2.516662 | 2.661010 | 2.807647 |
| 0.7 | 1.983109 | 2.117259 | 2.253942 | 2.393099 | 2.534670 | 2.678602 | 2.824841 |
| 0.6 | 2.000400 | 2.134108 | 2.270372 | 2.409128 | 2.550319 | 2.693887 | 2.839779 |
| 0.5 | 2.015071 | 2.148403 | 2.284309 | 2.422725 | 2.563590 | 2.706849 | 2.852446 |
| 0.4 | 2.027103 | 2.160125 | 2.295736 | 2.433871 | 2.574469 | 2.717434 | 2.862827 |
| 0.3 | 2.036479 | 2.169258 | 2.304638 | 2.442554 | 2.582945 | 2.725750 | 2.870913 |
| 0.2 | 2.043185 | 2.175790 | 2.311004 | 2.448764 | 2.589005 | 2.731667 | 2.876694 |
| 0.1 | 2.047213 | 2.179713 | 2.314826 | 2.452493 | 2.592644 | 2.735232 | 2.880166 |
| 0.0 | 2.048556 | 2.181021 | 2.316104 | 2.453737 | 2.593857 | 2.736405 | 2.881323 |

$$u = \ln|\Gamma(x+iy)| = \Re \ln \Gamma(z)$$

$\longrightarrow x$

| 4.9 | 5.0 | 5.1 | 5.2 | 5.3 | 5.4 | 5.5 | $y$ ↑ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| - 4.524777 | - 4.285507 | - 4.045863 | - 3.805840 | - 3.565430 | - 3.324629 | - 3.083433 | 10.0 |
| - 4.294318 | - 4.056729 | - 3.818749 | - 3.580385 | - 3.341616 | - 3.102446 | - 2.862866 | 9.8 |
| - 4.065386 | - 3.829501 | - 3.593215 | - 3.356524 | - 3.119419 | - 2.881898 | - 2.643955 | 9.6 |
| - 3.838035 | - 3.603878 | - 3.369305 | - 3.134311 | - 2.898891 | - 2.663041 | - 2.426753 | 9.4 |
| - 3.612322 | - 3.379914 | - 3.147077 | - 2.913804 | - 2.680091 | - 2.445931 | - 2.211319 | 9.2 |
| - 3.388304 | - 3.157671 | - 2.926592 | - 2.695063 | - 2.463076 | - 2.230627 | - 1.997712 | 9.0 |
| - 3.166044 | - 2.937208 | - 2.707911 | - 2.478147 | - 2.247910 | - 2.017194 | - 1.785995 | 8.8 |
| - 2.945604 | - 2.718592 | - 2.491100 | - 2.263125 | - 2.034658 | - 1.805696 | - 1.576234 | 8.6 |
| - 2.727056 | - 2.501890 | - 2.276228 | - 2.050063 | - 1.823390 | - 1.596203 | - 1.368497 | 8.4 |
| - 2.510468 | - 2.287174 | - 2.063365 | - 1.839034 | - 1.614176 | - 1.388786 | - 1.162858 | 8.2 |
| - 2.295918 | - 2.074521 | - 1.852588 | - 1.630115 | - 1.407094 | - 1.183521 | - 0.959390 | 8.0 |
| - 2.083483 | - 1.864008 | - 1.643977 | - 1.423383 | - 1.202222 | - 0.980487 | - 0.758174 | 7.8 |
| - 1.873248 | - 1.655720 | - 1.437615 | - 1.218924 | - 0.999644 | - 0.779769 | - 0.559293 | 7.6 |
| - 1.665301 | - 1.449745 | - 1.233589 | - 1.016824 | - 0.799447 | - 0.581451 | - 0.362833 | 7.4 |
| - 1.459734 | - 1.246175 | - 1.031991 | - 0.817175 | - 0.601722 | - 0.385628 | - 0.168885 | 7.2 |
| - 1.256645 | - 1.045108 | - 0.832920 | - 0.620075 | - 0.406568 | - 0.192393 | + 0.022454 | 7.0 |
| - 1.056137 | - 0.846646 | - 0.636477 | - 0.425626 | - 0.214084 | - 0.001849 | 0.211086 | 6.8 |
| - 0.858317 | - 0.650898 | - 0.442772 | - 0.233934 | - 0.024378 | + 0.185900 | 0.396904 | 6.6 |
| - 0.663303 | - 0.457978 | - 0.251916 | - 0.045112 | + 0.162439 | 0.370742 | 0.579800 | 6.4 |
| - 0.471214 | - 0.268006 | - 0.064029 | + 0.140721 | 0.346249 | 0.552561 | 0.759657 | 6.2 |
| - 0.282178 | - 0.081108 | + 0.120764 | 0.323442 | 0.526930 | 0.731234 | 0.936355 | 6.0 |
| - 0.096329 | + 0.102582 | 0.302330 | 0.502918 | 0.704352 | 0.906634 | 1.109768 | 5.8 |
| + 0.086191 | 0.282923 | 0.480530 | 0.679014 | 0.878378 | 1.078628 | 1.279764 | 5.6 |
| 0.265231 | 0.459768 | 0.655218 | 0.851584 | 1.048868 | 1.247074 | 1.446204 | 5.4 |
| 0.440635 | 0.632961 | 0.826241 | 1.020477 | 1.215672 | 1.411827 | 1.608944 | 5.2 |
| 0.612236 | 0.802338 | 0.993438 | 1.185536 | 1.378634 | 1.572733 | 1.767834 | 5.0 |
| 0.779859 | 0.967728 | 1.156639 | 1.346594 | 1.537592 | 1.729632 | 1.922717 | 4.8 |
| 0.943321 | 1.128951 | 1.315669 | 1.503477 | 1.692373 | 1.882358 | 2.073429 | 4.6 |
| 1.102428 | 1.285816 | 1.470342 | 1.656005 | 1.842803 | 2.030737 | 2.219802 | 4.4 |
| 1.256980 | 1.438128 | 1.620465 | 1.803989 | 1.988698 | 2.174590 | 2.361659 | 4.2 |
| 1.406765 | 1.585679 | 1.765836 | 1.947233 | 2.129866 | 2.313730 | 2.498820 | 4.0 |
| 1.551563 | 1.728256 | 1.906248 | 2.085534 | 2.266108 | 2.447964 | 2.631096 | 3.8 |
| 1.691144 | 1.865635 | 2.041482 | 2.218680 | 2.397220 | 2.577095 | 2.758297 | 3.6 |
| 1.825269 | 1.997586 | 2.171318 | 2.346457 | 2.522994 | 2.700920 | 2.880224 | 3.4 |
| 1.953695 | 2.123871 | 2.295523 | 2.468641 | 2.643214 | 2.819230 | 2.996678 | 3.2 |
| 2.076169 | 2.244247 | 2.413863 | 2.585006 | 2.757661 | 2.931815 | 3.107453 | 3.0 |
| 2.192432 | 2.358465 | 2.526100 | 2.695322 | 2.866114 | 3.038461 | 3.212346 | 2.8 |
| 2.302221 | 2.466273 | 2.631992 | 2.799356 | 2.968349 | 3.138954 | 3.311150 | 2.6 |
| 2.405271 | 2.567417 | 2.731292 | 2.896874 | 3.064144 | 3.233079 | 3.403659 | 2.4 |
| 2.501318 | 2.661643 | 2.823761 | 2.987646 | 3.153275 | 3.320625 | 3.489671 | 2.2 |
| 2.590097 | 2.748702 | 2.909160 | 3.071444 | 3.235527 | 3.401384 | 3.568988 | 2.0 |
| 2.631681 | 2.789466 | 2.949135 | 3.110658 | 3.274008 | 3.439156 | 3.606076 | 1.9 |
| 2.671352 | 2.828347 | 2.987256 | 3.148046 | 3.310690 | 3.475156 | 3.641418 | 1.8 |
| 2.709079 | 2.865316 | 3.023494 | 3.183582 | 3.345547 | 3.509361 | 3.674993 | 1.7 |
| 2.744832 | 2.900343 | 3.057823 | 3.217239 | 3.378558 | 3.541748 | 3.706778 | 1.6 |
| 2.778582 | 2.933402 | 3.090217 | 3.248993 | 3.409697 | 3.572294 | 3.736753 | 1.5 |
| 2.810301 | 2.964465 | 3.120651 | 3.278821 | 3.438942 | 3.600978 | 3.764894 | 1.4 |
| 2.839961 | 2.993507 | 3.149099 | 3.306698 | 3.466271 | 3.627779 | 3.791189 | 1.3 |
| 2.867536 | 3.020504 | 3.175540 | 3.332606 | 3.491664 | 3.652679 | 3.815614 | 1.2 |
| 2.893003 | 3.045431 | 3.199951 | 3.356521 | 3.515102 | 3.675658 | 3.838151 | 1.1 |
| 2.916336 | 3.068269 | 3.222312 | 3.378424 | 3.536566 | 3.696700 | 3.858787 | 1.0 |
| 2.937517 | 3.088995 | 3.242603 | 3.398297 | 3.556040 | 3.715787 | 3.877504 | 0.9 |
| 2.956531 | 3.107592 | 3.260807 | 3.416126 | 3.573506 | 3.732907 | 3.894290 | 0.8 |
| 2.973337 | 3.124042 | 3.276909 | 3.431893 | 3.588952 | 3.748044 | 3.909131 | 0.7 |
| 2.987944 | 3.138331 | 3.290893 | 3.445586 | 3.602365 | 3.761189 | 3.922017 | 0.6 |
| 3.000327 | 3.150444 | 3.302748 | 3.457192 | 3.613733 | 3.772328 | 3.932937 | 0.5 |
| 3.010476 | 3.160371 | 3.312473 | 3.466702 | 3.623048 | 3.781455 | 3.941883 | 0.4 |
| 3.018381 | 3.168102 | 3.320030 | 3.474108 | 3.630301 | 3.788561 | 3.948849 | 0.3 |
| 3.024032 | 3.173629 | 3.325435 | 3.479402 | 3.635485 | 3.793641 | 3.953828 | 0.2 |
| 3.027425 | 3.176947 | 3.328682 | 3.482580 | 3.638598 | 3.796692 | 3.956817 | 0.1 |
| 3.028557 | 3.178054 | 3.329764 | 3.483640 | 3.639636 | 3.797708 | 3.957814 | 0.0 |

$$u=\ln|\Gamma(x+iy)|=\Re\ln\Gamma(z)$$

$\longrightarrow x$

| $y$ ↑ | 5.6 | 5.7 | 5.8 | 5.9 | 6.0 | 6.1 | 6.2 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 10.0 | - 2.841836 | - 2.599833 | - 2.357422 | - 2.114596 | - 1.871350 | - 1.627682 | - 1.383588 |
| 9.8 | - 2.622872 | - 2.382462 | - 2.141626 | - 1.900364 | - 1.658669 | - 1.416534 | - 1.173967 |
| 9.6 | - 2.405583 | - 2.166781 | - 1.927540 | - 1.687859 | - 1.447731 | - 1.207153 | - 0.966122 |
| 9.4 | - 2.190024 | - 1.952848 | - 1.715220 | - 1.477137 | - 1.238593 | - 0.999585 | - 0.760109 |
| 9.2 | - 1.976250 | - 1.740720 | - 1.504723 | - 1.268256 | - 1.031313 | - 0.793891 | - 0.555986 |
| 9.0 | - 1.764324 | - 1.530458 | - 1.296110 | - 1.061276 | - 0.825951 | - 0.590131 | - 0.353811 |
| 8.8 | - 1.554307 | - 1.322124 | - 1.089444 | - 0.856261 | - 0.622569 | - 0.388367 | - 0.153649 |
| 8.6 | - 1.346265 | - 1.115785 | - 0.884789 | - 0.653274 | - 0.421234 | - 0.188665 | + 0.044436 |
| 8.4 | - 1.140268 | - 0.911509 | - 0.682216 | - 0.452385 | - 0.222013 | + 0.008906 | 0.240376 |
| 8.2 | - 0.936387 | - 0.709367 | - 0.481796 | - 0.253667 | - 0.024977 | 0.204277 | 0.434100 |
| 8.0 | - 0.734697 | - 0.509436 | - 0.283603 | - 0.057193 | + 0.169797 | 0.397372 | 0.625535 |
| 7.8 | - 0.535278 | - 0.311793 | - 0.087716 | + 0.136959 | 0.362234 | 0.588114 | 0.814603 |
| 7.6 | - 0.338212 | - 0.116522 | + 0.105783 | 0.328708 | 0.552252 | 0.776422 | 1.001224 |
| 7.4 | - 0.143587 | + 0.076293 | 0.296808 | 0.517966 | 0.739766 | 0.962214 | 1.185315 |
| 7.2 | + 0.048509 | 0.266559 | 0.485270 | 0.704645 | 0.924688 | 1.145401 | 1.366789 |
| 7.0 | 0.237979 | 0.454184 | 0.671074 | 0.888653 | 1.106924 | 1.325891 | 1.545554 |
| 6.8 | 0.424723 | 0.639068 | 0.854124 | 1.069893 | 1.286381 | 1.503589 | 1.721518 |
| 6.6 | 0.608639 | 0.821109 | 1.034316 | 1.248265 | 1.462956 | 1.678395 | 1.894581 |
| 6.4 | 0.789617 | 1.000198 | 1.211544 | 1.423660 | 1.636546 | 1.850206 | 2.064642 |
| 6.2 | 0.967543 | 1.176223 | 1.385697 | 1.595969 | 1.807042 | 2.018916 | 2.231594 |
| 6.0 | 1.142298 | 1.349064 | 1.556657 | 1.765078 | 1.974330 | 2.184412 | 2.395326 |
| 5.8 | 1.313756 | 1.518601 | 1.724304 | 1.930866 | 2.138291 | 2.346577 | 2.555725 |
| 5.6 | 1.481789 | 1.684703 | 1.888510 | 2.093210 | 2.298803 | 2.505290 | 2.712671 |
| 5.4 | 1.646258 | 1.847238 | 2.049145 | 2.251978 | 2.455739 | 2.660428 | 2.866042 |
| 5.2 | 1.807023 | 2.006065 | 2.206070 | 2.407038 | 2.608967 | 2.811858 | 3.015709 |
| 5.0 | 1.963936 | 2.161039 | 2.359144 | 2.558248 | 2.758350 | 2.959449 | 3.161542 |
| 4.8 | 2.116843 | 2.312011 | 2.508219 | 2.705464 | 2.903746 | 3.103059 | 3.303405 |
| 4.6 | 2.265585 | 2.458823 | 2.653141 | 2.848537 | 3.045007 | 3.242548 | 3.441157 |
| 4.4 | 2.409995 | 2.601314 | 2.793754 | 2.987312 | 3.181985 | 3.377768 | 3.574655 |
| 4.2 | 2.549902 | 2.739316 | 2.929893 | 3.121631 | 3.314524 | 3.508566 | 3.703752 |
| 4.0 | 2.685131 | 2.872657 | 3.061392 | 3.251330 | 3.442465 | 3.634790 | 3.828298 |
| 3.8 | 2.815497 | 3.001160 | 3.188078 | 3.376242 | 3.565646 | 3.756281 | 3.948139 |
| 3.6 | 2.940816 | 3.124646 | 3.309775 | 3.496198 | 3.683901 | 3.872878 | 4.063120 |
| 3.4 | 3.060897 | 3.242927 | 3.426306 | 3.611021 | 3.797063 | 3.984421 | 4.173083 |
| 3.2 | 3.175544 | 3.355818 | 3.537487 | 3.720539 | 3.904962 | 4.090743 | 4.277870 |
| 3.0 | 3.284562 | 3.463128 | 3.643137 | 3.824575 | 4.007428 | 4.191680 | 4.377321 |
| 2.8 | 3.387754 | 3.564667 | 3.743072 | 3.922950 | 4.104288 | 4.287070 | 4.471279 |
| 2.6 | 3.484919 | 3.660245 | 3.837108 | 4.015491 | 4.195377 | 4.376748 | 4.559586 |
| 2.4 | 3.575863 | 3.749672 | 3.925065 | 4.102022 | 4.280524 | 4.460553 | 4.642089 |
| 2.2 | 3.660391 | 3.832763 | 4.006764 | 4.182373 | 4.359568 | 4.538329 | 4.718636 |
| 2.0 | 3.738314 | 3.909337 | 4.082032 | 4.256378 | 4.432350 | 4.609925 | 4.789083 |
| 1.9 | 3.774740 | 3.945124 | 4.117203 | 4.290951 | 4.466344 | 4.643360 | 4.821975 |
| 1.8 | 3.809448 | 3.979219 | 4.150704 | 4.323878 | 4.498717 | 4.675195 | 4.853290 |
| 1.7 | 3.842415 | 4.011598 | 4.182516 | 4.355142 | 4.529450 | 4.705415 | 4.883012 |
| 1.6 | 3.873619 | 4.042243 | 4.212620 | 4.384723 | 4.558526 | 4.734002 | 4.911126 |
| 1.5 | 3.903043 | 4.071135 | 4.240998 | 4.412606 | 4.585929 | 4.760941 | 4.937617 |
| 1.4 | 3.930665 | 4.098255 | 4.267633 | 4.438772 | 4.611642 | 4.786217 | 4.962469 |
| 1.3 | 3.956469 | 4.123585 | 4.292509 | 4.463206 | 4.635652 | 4.809815 | 4.985670 |
| 1.2 | 3.980435 | 4.147110 | 4.315607 | 4.485394 | 4.657943 | 4.831723 | 5.007207 |
| 1.1 | 4.002548 | 4.168813 | 4.336915 | 4.506821 | 4.678502 | 4.851927 | 5.027067 |
| 1.0 | 4.022792 | 4.188680 | 4.356419 | 4.525974 | 4.697317 | 4.870416 | 5.045240 |
| 0.9 | 4.041152 | 4.206697 | 4.374106 | 4.543342 | 4.714376 | 4.887177 | 5.061714 |
| 0.8 | 4.057617 | 4.222853 | 4.389962 | 4.558912 | 4.729669 | 4.902202 | 5.076481 |
| 0.7 | 4.072173 | 4.237134 | 4.403979 | 4.572674 | 4.743185 | 4.915481 | 5.089531 |
| 0.6 | 4.084810 | 4.249533 | 4.416147 | 4.584620 | 4.754918 | 4.927007 | 5.100857 |
| 0.5 | 4.095519 | 4.260039 | 4.426458 | 4.594742 | 4.764857 | 4.936771 | 5.110452 |
| 0.4 | 4.104292 | 4.268645 | 4.434903 | 4.603032 | 4.772999 | 4.944780 | 5.118311 |
| 0.3 | 4.111123 | 4.275346 | 4.441478 | 4.609487 | 4.779336 | 4.950998 | 5.124428 |
| 0.2 | 4.116006 | 4.280134 | 4.446178 | 4.614100 | 4.783866 | 4.955443 | 5.128800 |
| 0.1 | 4.118936 | 4.283009 | 4.448999 | 4.616867 | 4.786585 | 4.958114 | 5.131424 |
| 0.0 | 4.119913 | 4.283968 | 4.449939 | 4.617792 | 4.787492 | 4.959004 | 5.132299 |

$$u = \ln|\Gamma(x+iy)| = \Re \ln \Gamma(z)$$

| 6.3 → x | 6.4 | 6.5 | 6.6 | 6.7 | 6.8 | 6.9 | y |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| - 1.139063 | - 0.894103 | - 0.648705 | - 0.402865 | - 0.156580 | + 0.090153 | 0.337338 | 10.0 |
| - 0.930951 | - 0.687490 | - 0.443576 | - 0.199207 | + 0.045619 | 0.290909 | 0.536662 | 9.8 |
| - 0.724633 | - 0.482683 | - 0.240267 | + 0.002618 | 0.245974 | 0.489807 | 0.734116 | 9.6 |
| - 0.520161 | - 0.279737 | - 0.038833 | 0.202554 | 0.444427 | 0.686790 | 0.929646 | 9.4 |
| - 0.317593 | - 0.078710 | + 0.160669 | 0.400545 | 0.640922 | 0.881804 | 1.123193 | 9.2 |
| - 0.116989 | + 0.120340 | 0.358178 | 0.596530 | 0.835400 | 1.074788 | 1.314700 | 9.0 |
| + 0.081588 | 0.317347 | 0.553634 | 0.790449 | 1.027798 | 1.265682 | 1.504104 | 8.8 |
| 0.278073 | 0.512250 | 0.746970 | 0.982237 | 1.218053 | 1.454421 | 1.691344 | 8.6 |
| 0.472399 | 0.704980 | 0.938121 | 1.171827 | 1.406099 | 1.640940 | 1.876354 | 8.4 |
| 0.664496 | 0.895467 | 1.127017 | 1.359149 | 1.591866 | 1.825170 | 2.059064 | 8.2 |
| 0.854289 | 1.083638 | 1.313585 | 1.544133 | 1.775284 | 2.007041 | 2.239406 | 8.0 |
| 1.041703 | 1.269417 | 1.497750 | 1.726702 | 1.956278 | 2.186479 | 2.417307 | 7.8 |
| 1.226657 | 1.452726 | 1.679432 | 1.906779 | 2.134770 | 2.363406 | 2.592690 | 7.6 |
| 1.409069 | 1.633481 | 1.858552 | 2.084284 | 2.310681 | 2.537744 | 2.765476 | 7.4 |
| 1.588853 | 1.811597 | 2.035023 | 2.259133 | 2.483928 | 2.709411 | 2.935584 | 7.2 |
| 1.765919 | 1.986986 | 2.208758 | 2.431237 | 2.654424 | 2.878321 | 3.102930 | 7.0 |
| 1.940173 | 2.159555 | 2.379666 | 2.600507 | 2.822080 | 3.044387 | 3.267426 | 6.8 |
| 2.111518 | 2.329208 | 2.547652 | 2.766850 | 2.986805 | 3.207516 | 3.428985 | 6.6 |
| 2.279854 | 2.495846 | 2.712616 | 2.930168 | 3.148501 | 3.367615 | 3.587511 | 6.4 |
| 2.445076 | 2.659364 | 2.874459 | 3.090360 | 3.307069 | 3.524585 | 3.742909 | 6.2 |
| 2.607074 | 2.819657 | 3.033073 | 3.247323 | 3.462408 | 3.678327 | 3.895078 | 6.0 |
| 2.765737 | 2.976612 | 3.188350 | 3.400950 | 3.614412 | 3.828735 | 4.043918 | 5.8 |
| 2.920946 | 3.130115 | 3.340176 | 3.551128 | 3.762972 | 3.975704 | 4.189323 | 5.6 |
| 3.072582 | 3.280047 | 3.488435 | 3.697745 | 3.907975 | 4.119122 | 4.331185 | 5.4 |
| 3.220519 | 3.426286 | 3.633007 | 3.840681 | 4.049305 | 4.258877 | 4.469394 | 5.2 |
| 3.364663 | 3.568704 | 3.773768 | 3.979816 | 4.186845 | 4.394852 | 4.603834 | 5.0 |
| 3.504777 | 3.707174 | 3.910591 | 4.115025 | 4.320472 | 4.526929 | 4.734391 | 4.8 |
| 3.640828 | 3.841559 | 4.043345 | 4.246181 | 4.450064 | 4.654986 | 4.860945 | 4.6 |
| 3.772641 | 3.971725 | 4.171898 | 4.373155 | 4.575491 | 4.778900 | 4.983376 | 4.4 |
| 3.900075 | 4.097532 | 4.296112 | 4.495812 | 4.696626 | 4.898544 | 5.101561 | 4.2 |
| 4.022982 | 4.218836 | 4.415850 | 4.614020 | 4.813336 | 5.013790 | 5.215377 | 4.0 |
| 4.141213 | 4.335493 | 4.530971 | 4.727639 | 4.925489 | 5.124511 | 5.324697 | 3.8 |
| 4.254616 | 4.447357 | 4.641333 | 4.836534 | 5.032952 | 5.230576 | 5.429397 | 3.6 |
| 4.363040 | 4.554280 | 4.746792 | 4.940565 | 5.135590 | 5.331854 | 5.529347 | 3.4 |
| 4.466330 | 4.656113 | 4.847205 | 5.039594 | 5.233269 | 5.428217 | 5.624425 | 3.2 |
| 4.564335 | 4.752709 | 4.942429 | 5.133482 | 5.325855 | 5.519534 | 5.714506 | 3.0 |
| 4.656901 | 4.843920 | 5.032322 | 5.222092 | 5.413215 | 5.605677 | 5.799464 | 2.8 |
| 4.743876 | 4.929601 | 5.116744 | 5.305289 | 5.495221 | 5.686523 | 5.879180 | 2.6 |
| 4.825113 | 5.009609 | 5.195557 | 5.382941 | 5.571743 | 5.761948 | 5.953536 | 2.4 |
| 4.900468 | 5.083805 | 5.268629 | 5.454921 | 5.642662 | 5.831833 | 6.022418 | 2.2 |
| 4.969800 | 5.152057 | 5.335831 | 5.521104 | 5.707856 | 5.896066 | 6.085717 | 2.0 |
| 5.002167 | 5.183913 | 5.367193 | 5.551986 | 5.738270 | 5.926029 | 6.115240 | 1.9 |
| 5.032977 | 5.214235 | 5.397042 | 5.581375 | 5.767214 | 5.954539 | 6.143329 | 1.8 |
| 5.062218 | 5.243010 | 5.425363 | 5.609258 | 5.794672 | 5.981583 | 6.169972 | 1.7 |
| 5.089874 | 5.270221 | 5.452145 | 5.635622 | 5.820631 | 6.007150 | 6.195157 | 1.6 |
| 5.115930 | 5.295857 | 5.477373 | 5.660455 | 5.845081 | 6.031228 | 6.218875 | 1.5 |
| 5.140373 | 5.319903 | 5.501035 | 5.683745 | 5.868009 | 6.053806 | 6.241113 | 1.4 |
| 5.163190 | 5.342348 | 5.523119 | 5.705480 | 5.889406 | 6.074874 | 6.261862 | 1.3 |
| 5.184368 | 5.363179 | 5.543614 | 5.725649 | 5.909260 | 6.094422 | 6.281114 | 1.2 |
| 5.203896 | 5.382386 | 5.562510 | 5.744244 | 5.927562 | 6.112442 | 6.298859 | 1.1 |
| 5.221764 | 5.399958 | 5.579796 | 5.761253 | 5.944304 | 6.128923 | 6.315038 | 1.0 |
| 5.237960 | 5.415886 | 5.595464 | 5.776670 | 5.959476 | 6.143859 | 6.329795 | 0.9 |
| 5.252477 | 5.430161 | 5.609506 | 5.790485 | 5.973072 | 6.157243 | 6.342973 | 0.8 |
| 5.265306 | 5.442776 | 5.621913 | 5.802692 | 5.985085 | 6.169068 | 6.354616 | 0.7 |
| 5.276439 | 5.453723 | 5.632680 | 5.813284 | 5.995551 | 6.179328 | 6.364717 | 0.6 |
| 5.285870 | 5.462996 | 5.641800 | 5.822256 | 6.004337 | 6.188018 | 6.373272 | 0.5 |
| 5.293594 | 5.470590 | 5.649269 | 5.829604 | 6.011567 | 6.195134 | 6.380278 | 0.4 |
| 5.299607 | 5.476501 | 5.655082 | 5.835322 | 6.017195 | 6.200672 | 6.385730 | 0.3 |
| 5.303904 | 5.480726 | 5.659237 | 5.839409 | 6.021216 | 6.204630 | 6.389626 | 0.2 |
| 5.306483 | 5.483262 | 5.661731 | 5.841862 | 6.023622 | 6.207005 | 6.391965 | 0.1 |
| 5.307343 | 5.484107 | 5.662562 | 5.842680 | 6.024434 | 6.207797 | 6.392744 | 0.0 |

$$u = \ln|\Gamma(x+iy)| = \Re \ln \Gamma(z)$$

$\longrightarrow x$

| $y$ ↑ | 7.0 | 7.1 | 7.2 | 7.3 | 7.4 | 7.5 | 7.6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 10.0 | 0.584977 | 0.833074 | 1.081630 | 1.330650 | 1.580135 | 1.830088 | 2.080512 |
| 9.8 | 0.782884 | 1.029579 | 1.276740 | 1.524382 | 1.772501 | 2.021101 | 2.270184 |
| 9.6 | 0.978909 | 1.224186 | 1.469947 | 1.716200 | 1.962943 | 2.210181 | 2.457915 |
| 9.4 | 1.172997 | 1.416846 | 1.661196 | 1.906050 | 2.151409 | 2.397275 | 2.643652 |
| 9.2 | 1.365093 | 1.607504 | 1.850432 | 2.093877 | 2.337842 | 2.582329 | 2.827341 |
| 9.0 | 1.555136 | 1.796100 | 2.037596 | 2.279623 | 2.522186 | 2.765286 | 3.008924 |
| 8.8 | 1.743068 | 1.982575 | 2.222628 | 2.463230 | 2.704382 | 2.946086 | 3.188345 |
| 8.6 | 1.928825 | 2.166865 | 2.405468 | 2.644635 | 2.884368 | 3.124670 | 3.365541 |
| 8.4 | 2.112342 | 2.348906 | 2.586050 | 2.823775 | 3.062082 | 3.300974 | 3.540452 |
| 8.2 | 2.293551 | 2.528631 | 2.764308 | 3.000583 | 3.237458 | 3.474934 | 3.713013 |
| 8.0 | 2.472382 | 2.705971 | 2.940173 | 3.174992 | 3.410428 | 3.646483 | 3.883157 |
| 7.8 | 2.648764 | 2.880853 | 3.113575 | 3.346931 | 3.580922 | 3.815551 | 4.050817 |
| 7.6 | 2.822622 | 3.053203 | 3.284439 | 3.516327 | 3.748869 | 3.982067 | 4.215921 |
| 7.4 | 2.993875 | 3.222945 | 3.452689 | 3.683105 | 3.914194 | 4.145959 | 4.378398 |
| 7.2 | 3.162446 | 3.389000 | 3.618247 | 3.847187 | 4.076820 | 4.307149 | 4.538172 |
| 7.0 | 3.328250 | 3.554284 | 3.781031 | 4.008493 | 4.236669 | 4.465560 | 4.695165 |
| 6.8 | 3.491202 | 3.715713 | 3.940958 | 4.166940 | 4.393657 | 4.621111 | 4.849300 |
| 6.6 | 3.651212 | 3.874197 | 4.097941 | 4.322443 | 4.547702 | 4.773719 | 5.000493 |
| 6.4 | 3.808189 | 4.029649 | 4.251891 | 4.474914 | 4.698717 | 4.923300 | 5.148662 |
| 6.2 | 3.962038 | 4.181974 | 4.402717 | 4.624263 | 4.846613 | 5.069766 | 5.293720 |
| 6.0 | 4.112663 | 4.331078 | 4.550323 | 4.770398 | 4.991299 | 5.213027 | 5.435579 |
| 5.8 | 4.259960 | 4.476859 | 4.694613 | 4.913222 | 5.132682 | 5.352992 | 5.574150 |
| 5.6 | 4.403828 | 4.619218 | 4.835488 | 5.052638 | 5.270665 | 5.489566 | 5.709339 |
| 5.4 | 4.544162 | 4.758050 | 4.972846 | 5.188547 | 5.405151 | 5.622654 | 5.841053 |
| 5.2 | 4.680852 | 4.893249 | 5.106582 | 5.320846 | 5.536039 | 5.752157 | 5.969196 |
| 5.0 | 4.813787 | 5.024706 | 5.236590 | 5.449432 | 5.663229 | 5.877976 | 6.093670 |
| 4.8 | 4.942853 | 5.152311 | 5.362761 | 5.574197 | 5.786615 | 6.000010 | 6.214377 |
| 4.6 | 5.067935 | 5.275949 | 5.484984 | 5.695034 | 5.906093 | 6.118156 | 6.331217 |
| 4.4 | 5.188914 | 5.395507 | 5.603149 | 5.811833 | 6.021557 | 6.232310 | 6.444087 |
| 4.2 | 5.305672 | 5.510867 | 5.717142 | 5.924487 | 6.132899 | 6.342367 | 6.552886 |
| 4.0 | 5.418087 | 5.621913 | 5.826848 | 6.032883 | 6.240010 | 6.448222 | 6.657512 |
| 3.8 | 5.526038 | 5.728526 | 5.932152 | 6.136907 | 6.342783 | 6.549770 | 6.757861 |
| 3.6 | 5.629403 | 5.830586 | 6.032939 | 6.236449 | 6.441107 | 6.646905 | 6.853832 |
| 3.4 | 5.728059 | 5.927979 | 6.129095 | 6.331397 | 6.534877 | 6.739522 | 6.945322 |
| 3.2 | 5.821884 | 6.020581 | 6.220504 | 6.421641 | 6.623983 | 6.827516 | 7.032231 |
| 3.0 | 5.910759 | 6.108278 | 6.307054 | 6.507072 | 6.708320 | 6.910787 | 7.114460 |
| 2.8 | 5.994561 | 6.190956 | 6.388634 | 6.587581 | 6.787785 | 6.989233 | 7.191911 |
| 2.6 | 6.073178 | 6.268502 | 6.465134 | 6.663064 | 6.862276 | 7.062756 | 7.264490 |
| 2.4 | 6.146494 | 6.340804 | 6.536451 | 6.733420 | 6.931695 | 7.131262 | 7.332106 |
| 2.2 | 6.214399 | 6.407759 | 6.602481 | 6.798549 | 6.995947 | 7.194659 | 7.394671 |
| 2.0 | 6.276790 | 6.469266 | 6.663128 | 6.858359 | 7.054943 | 7.252862 | 7.452100 |
| 1.9 | 6.305885 | 6.497946 | 6.691404 | 6.886243 | 7.082443 | 7.279989 | 7.478865 |
| 1.8 | 6.333565 | 6.525229 | 6.718300 | 6.912763 | 7.108598 | 7.305788 | 7.504316 |
| 1.7 | 6.359818 | 6.551103 | 6.743807 | 6.937910 | 7.133397 | 7.330248 | 7.528446 |
| 1.6 | 6.384634 | 6.575558 | 6.767912 | 6.961676 | 7.156832 | 7.353361 | 7.551246 |
| 1.5 | 6.408000 | 6.598585 | 6.790608 | 6.984050 | 7.178893 | 7.375118 | 7.572706 |
| 1.4 | 6.429909 | 6.620172 | 6.811884 | 7.005024 | 7.199572 | 7.395510 | 7.592821 |
| 1.3 | 6.450349 | 6.640312 | 6.831732 | 7.024588 | 7.218861 | 7.414532 | 7.611581 |
| 1.2 | 6.469313 | 6.658996 | 6.850145 | 7.042737 | 7.236753 | 7.432174 | 7.628981 |
| 1.1 | 6.486791 | 6.676216 | 6.867113 | 7.059461 | 7.253240 | 7.448430 | 7.645013 |
| 1.0 | 6.502776 | 6.691964 | 6.882630 | 7.074755 | 7.268316 | 7.463295 | 7.659672 |
| 0.9 | 6.517261 | 6.706233 | 6.896690 | 7.088611 | 7.281975 | 7.476762 | 7.672952 |
| 0.8 | 6.530239 | 6.719017 | 6.909286 | 7.101025 | 7.294211 | 7.488825 | 7.684847 |
| 0.7 | 6.541704 | 6.730311 | 6.920414 | 7.111990 | 7.305020 | 7.499481 | 7.695354 |
| 0.6 | 6.551652 | 6.740110 | 6.930067 | 7.121503 | 7.314396 | 7.508725 | 7.704469 |
| 0.5 | 6.560076 | 6.748408 | 6.938242 | 7.129560 | 7.322336 | 7.516552 | 7.712187 |
| 0.4 | 6.566976 | 6.755214 | 6.944937 | 7.136156 | 7.328837 | 7.522961 | 7.718506 |
| 0.3 | 6.572344 | 6.760494 | 6.950146 | 7.141289 | 7.333896 | 7.527949 | 7.723424 |
| 0.2 | 6.576181 | 6.764269 | 6.953869 | 7.144957 | 7.337512 | 7.531512 | 7.726938 |
| 0.1 | 6.578484 | 6.766537 | 6.956103 | 7.147159 | 7.339682 | 7.533651 | 7.729047 |
| 0.0 | 6.579251 | 6.767293 | 6.956848 | 7.147893 | 7.340405 | 7.534364 | 7.729750 |

$$u = \ln|\Gamma(x+iy)| = \Re \ln \Gamma(z)$$

$\longrightarrow x$

| 7.7 | 7.8 | 7.9 | 8.0 | 8.1 | 8.2 | 8.3 | $y$ ↑ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2.331408 | 2.582778 | 2.834625 | 3.086950 | 3.339756 | 3.593044 | 3.846816 | 10.0 |
| 2.519751 | 2.769808 | 3.020352 | 3.271389 | 3.522921 | 3.774941 | 4.027462 | 9.8 |
| 2.706147 | 2.954881 | 3.204115 | 3.453856 | 3.704102 | 3.954854 | 4.206117 | 9.6 |
| 2.890541 | 3.137944 | 3.385863 | 3.634380 | 3.883255 | 4.132731 | 4.382730 | 9.4 |
| 3.072878 | 3.318944 | 3.565540 | 3.812668 | 4.060327 | 4.308521 | 4.557250 | 9.2 |
| 3.253104 | 3.497826 | 3.743092 | 3.988903 | 4.235262 | 4.482168 | 4.729624 | 9.0 |
| 3.431159 | 3.674530 | 3.918461 | 4.162952 | 4.408004 | 4.653619 | 4.899797 | 8.8 |
| 3.606984 | 3.849000 | 4.091589 | 4.334754 | 4.578495 | 4.822814 | 5.067712 | 8.6 |
| 3.780517 | 4.021171 | 4.262416 | 4.504251 | 4.746677 | 4.989697 | 5.233310 | 8.4 |
| 3.951696 | 4.190984 | 4.430878 | 4.671379 | 4.912488 | 5.154206 | 5.396532 | 8.2 |
| 4.120453 | 4.358371 | 4.596912 | 4.836076 | 5.075865 | 5.316278 | 5.557317 | 8.0 |
| 4.286722 | 4.523267 | 4.760452 | 4.998277 | 5.236743 | 5.475851 | 5.715600 | 7.8 |
| 4.450433 | 4.685601 | 4.921429 | 5.157913 | 5.395055 | 5.632857 | 5.871317 | 7.6 |
| 4.612665 | 4.845305 | 5.079773 | 5.314915 | 5.550734 | 5.787231 | 6.024402 | 7.4 |
| 4.769890 | 5.002303 | 5.235411 | 5.469214 | 5.703710 | 5.938901 | 6.174785 | 7.2 |
| 4.925486 | 5.156520 | 5.388271 | 5.620734 | 5.853910 | 6.087799 | 6.322399 | 7.0 |
| 5.078224 | 5.307883 | 5.538275 | 5.769402 | 6.001261 | 6.233850 | 6.467169 | 6.8 |
| 5.228023 | 5.456309 | 5.685348 | 5.915141 | 6.145685 | 6.376980 | 6.609024 | 6.6 |
| 5.374802 | 5.601717 | 5.829408 | 6.057872 | 6.287108 | 6.517114 | 6.747889 | 6.4 |
| 5.518474 | 5.744025 | 5.970373 | 6.197515 | 6.425449 | 6.654176 | 6.883688 | 6.2 |
| 5.658953 | 5.883147 | 6.105160 | 6.333988 | 6.560629 | 6.788081 | 7.016342 | 6.0 |
| 5.796152 | 6.018998 | 6.242683 | 6.467207 | 6.692565 | 6.918755 | 7.145773 | 5.8 |
| 5.929980 | 6.151488 | 6.373857 | 6.597087 | 6.821173 | 7.046112 | 7.271901 | 5.6 |
| 6.060345 | 6.280526 | 6.501592 | 6.723541 | 6.946369 | 7.170071 | 7.394643 | 5.4 |
| 6.187152 | 6.406021 | 6.625799 | 6.846482 | 7.068066 | 7.290546 | 7.513918 | 5.2 |
| 6.310306 | 6.527880 | 6.746334 | 6.965819 | 7.186176 | 7.407452 | 7.629642 | 5.0 |
| 6.429711 | 6.646008 | 6.863260 | 7.081464 | 7.300613 | 7.520704 | 7.741730 | 4.8 |
| 6.545270 | 6.760309 | 6.976329 | 7.193324 | 7.411287 | 7.630214 | 7.850098 | 4.6 |
| 6.656882 | 6.870688 | 7.085498 | 7.301308 | 7.518109 | 7.735896 | 7.954660 | 4.4 |
| 6.764449 | 6.977047 | 7.190674 | 7.405324 | 7.620989 | 7.837661 | 8.055334 | 4.2 |
| 6.867870 | 7.079289 | 7.291762 | 7.505281 | 7.719837 | 7.935424 | 8.152033 | 4.0 |
| 6.967046 | 7.177318 | 7.388667 | 7.601085 | 7.814565 | 8.029096 | 8.244672 | 3.8 |
| 7.061879 | 7.271036 | 7.481297 | 7.692648 | 7.905082 | 8.118592 | 8.333167 | 3.6 |
| 7.152268 | 7.360349 | 7.569554 | 7.779876 | 7.991304 | 8.203826 | 8.417436 | 3.4 |
| 7.238116 | 7.445160 | 7.653352 | 7.862683 | 8.073141 | 8.284716 | 8.497398 | 3.2 |
| 7.319327 | 7.525377 | 7.325986 | 7.940980 | 8.150510 | 8.361178 | 8.572972 | 3.0 |
| 7.395808 | 7.600910 | 7.807205 | 8.014682 | 8.223328 | 8.433132 | 8.644083 | 2.8 |
| 7.467466 | 7.671669 | 7.877087 | 8.083707 | 8.291517 | 8.500502 | 8.710653 | 2.6 |
| 7.534213 | 7.737569 | 7.942161 | 8.147974 | 8.354995 | 8.563212 | 8.772612 | 2.4 |
| 7.595966 | 7.798530 | 8.002348 | 8.207408 | 8.413613 | 8.621192 | 8.829890 | 2.2 |
| 7.652642 | 7.854472 | 8.057575 | 8.261936 | 8.467540 | 8.674374 | 8.882422 | 2.0 |
| 7.679052 | 7.880538 | 8.083305 | 8.287338 | 8.492623 | 8.699145 | 8.906891 | 1.9 |
| 7.704167 | 7.905323 | 8.107769 | 8.311490 | 8.516469 | 8.722694 | 8.930148 | 1.8 |
| 7.727975 | 7.928818 | 8.130959 | 8.334381 | 8.539071 | 8.745013 | 8.952191 | 1.7 |
| 7.750469 | 7.951015 | 8.152866 | 8.356007 | 8.560421 | 8.766094 | 8.973011 | 1.6 |
| 7.771641 | 7.971907 | 8.173484 | 8.376358 | 8.580513 | 8.785932 | 8.992602 | 1.5 |
| 7.791485 | 7.991485 | 8.192806 | 8.395429 | 8.599339 | 8.804521 | 9.010958 | 1.4 |
| 7.809991 | 8.009745 | 8.210824 | 8.413213 | 8.616895 | 8.821853 | 9.028073 | 1.3 |
| 7.827155 | 8.026678 | 8.227534 | 8.429705 | 8.633174 | 8.837925 | 9.045943 | 1.2 |
| 7.842969 | 8.042280 | 8.242929 | 8.444898 | 8.648170 | 8.852730 | 9.058562 | 1.1 |
| 7.857427 | 8.056544 | 8.257002 | 8.458788 | 8.661881 | 8.866265 | 9.071925 | 1.0 |
| 7.870525 | 8.069465 | 8.269752 | 8.471369 | 8.674298 | 8.878523 | 9.084028 | 0.9 |
| 7.882258 | 8.081039 | 8.281171 | 8.482637 | 8.685420 | 8.889503 | 9.094868 | 0.8 |
| 7.892621 | 8.091261 | 8.291257 | 8.492590 | 8.695243 | 8.899199 | 9.104441 | 0.7 |
| 7.901610 | 8.100128 | 8.300005 | 8.501222 | 8.703762 | 8.907609 | 9.112744 | 0.6 |
| 7.909222 | 8.107636 | 8.307412 | 8.508531 | 8.710976 | 8.914729 | 9.119774 | 0.5 |
| 7.915454 | 8.113783 | 8.313477 | 8.514516 | 8.716893 | 8.920559 | 9.125529 | 0.4 |
| 7.920304 | 8.118567 | 8.318196 | 8.519172 | 8.721481 | 8.925095 | 9.130007 | 0.3 |
| 7.923769 | 8.121985 | 8.321568 | 8.522499 | 8.724761 | 8.928336 | 9.133206 | 0.2 |
| 7.925848 | 8.124036 | 8.323591 | 8.524496 | 8.726731 | 8.930281 | 9.135127 | 0.1 |
| 7.926541 | 8.124720 | 8.324266 | 8.525161 | 8.727388 | 8.930929 | 9.135767 | 0.0 |

$$u = \ln|\Gamma(x+iy)| = \Re \ln \Gamma(z)$$

$\longrightarrow x$

| $y$ ↑ | 8.4 | 8.5 | 8.6 | 8.7 | 8.8 | 8.9 | 9.0 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 10.0 | 4.101073 | 4.355817 | 4.611049 | 4.866771 | 5.122983 | 5.379687 | 5.636883 |
| 9.8 | 4.280478 | 4.533994 | 4.788011 | 5.042527 | 5.297549 | 5.553072 | 5.809101 |
| 9.6 | 4.457887 | 4.710170 | 4.962966 | 5.216274 | 5.470100 | 5.724439 | 5.979297 |
| 9.4 | 4.633250 | 4.884295 | 5.135866 | 5.387963 | 5.640588 | 5.893741 | 6.147423 |
| 9.2 | 4.806515 | 5.056319 | 5.306661 | 5.557542 | 5.808964 | 6.060927 | 6.313431 |
| 9.0 | 4.977631 | 5.226188 | 5.475297 | 5.724960 | 5.975176 | 6.225946 | 6.477270 |
| 8.8 | 5.146540 | 5.393848 | 5.641722 | 5.890163 | 6.139171 | 6.388746 | 6.638890 |
| 8.6 | 5.313188 | 5.559244 | 5.805880 | 6.053097 | 6.300896 | 6.549275 | 6.798236 |
| 8.4 | 5.477517 | 5.722319 | 5.967716 | 6.213707 | 6.460295 | 6.707478 | 6.955256 |
| 8.2 | 5.639469 | 5.883014 | 6.127169 | 6.371935 | 6.617311 | 6.863297 | 7.109893 |
| 8.0 | 5.798980 | 6.041269 | 6.284183 | 6.527723 | 6.771887 | 7.016677 | 7.262091 |
| 7.8 | 5.955991 | 6.197022 | 6.438695 | 6.681009 | 6.923964 | 7.167559 | 7.411793 |
| 7.6 | 6.110435 | 6.350210 | 6.590643 | 6.831733 | 7.073480 | 7.315883 | 7.558939 |
| 7.4 | 6.262248 | 6.500769 | 6.739964 | 6.979832 | 7.220373 | 7.461586 | 7.703468 |
| 7.2 | 6.411362 | 6.648631 | 6.886591 | 7.125240 | 7.364579 | 7.604606 | 7.845319 |
| 7.0 | 6.557709 | 6.793729 | 7.030457 | 7.267892 | 7.506034 | 7.744888 | 7.984428 |
| 6.8 | 6.701217 | 6.935993 | 7.171495 | 7.407722 | 7.644671 | 7.882341 | 8.120732 |
| 6.6 | 6.841816 | 7.075354 | 7.309635 | 7.544659 | 7.780423 | 8.016926 | 8.254165 |
| 6.4 | 6.979431 | 7.211737 | 7.444806 | 7.678635 | 7.913222 | 8.148565 | 8.384662 |
| 6.2 | 7.113987 | 7.345070 | 7.576934 | 7.809578 | 8.042997 | 8.277190 | 8.512153 |
| 6.0 | 7.245409 | 7.475279 | 7.705948 | 7.937416 | 8.169678 | 8.402731 | 8.636573 |
| 5.8 | 7.373618 | 7.602285 | 7.831772 | 8.062076 | 8.293192 | 8.525118 | 8.757851 |
| 5.6 | 7.498536 | 7.726014 | 7.954331 | 8.183483 | 8.413468 | 8.644280 | 8.875916 |
| 5.4 | 7.620083 | 7.846386 | 8.073547 | 8.301564 | 8.530431 | 8.760144 | 8.990701 |
| 5.2 | 7.738178 | 7.963322 | 8.189344 | 8.416241 | 8.644007 | 8.872639 | 9.102131 |
| 5.0 | 7.852740 | 8.076742 | 8.301643 | 8.527438 | 8.754122 | 8.981690 | 9.210138 |
| 4.8 | 7.963686 | 8.186566 | 8.410366 | 8.635079 | 8.860701 | 9.087226 | 9.314648 |
| 4.6 | 8.070933 | 8.292714 | 8.515433 | 8.739088 | 8.963669 | 9.189171 | 9.415590 |
| 4.4 | 8.174400 | 8.395104 | 8.616768 | 8.839386 | 9.062949 | 9.287454 | 9.512892 |
| 4.2 | 8.274002 | 8.493656 | 8.714290 | 8.935897 | 9.158469 | 9.382000 | 9.606484 |
| 4.0 | 8.369657 | 8.588289 | 8.807920 | 9.028544 | 9.250152 | 9.472738 | 9.696294 |
| 3.8 | 8.461283 | 8.678922 | 8.897581 | 9.117251 | 9.337925 | 9.559595 | 9.782252 |
| 3.6 | 8.548798 | 8.765478 | 8.983196 | 9.201945 | 9.421716 | 9.642501 | 9.864290 |
| 3.4 | 8.632122 | 8.847876 | 9.064689 | 9.282550 | 9.501452 | 9.721384 | 9.942340 |
| 3.2 | 8.711177 | 8.926042 | 9.141985 | 9.358995 | 9.577063 | 9.796179 | 10.016334 |
| 3.0 | 8.785883 | 8.999900 | 9.215012 | 9.431209 | 9.648481 | 9.866818 | 10.086210 |
| 2.8 | 8.856168 | 9.069377 | 9.283699 | 9.499123 | 9.715639 | 9.933235 | 10.151902 |
| 2.6 | 8.921957 | 9.134403 | 9.347978 | 9.562672 | 9.778473 | 9.995370 | 10.213354 |
| 2.4 | 8.983182 | 9.194910 | 9.407784 | 9.621791 | 9.836922 | 10.053163 | 10.270504 |
| 2.2 | 9.039775 | 9.250834 | 9.463053 | 9.676422 | 9.890927 | 10.106557 | 10.323300 |
| 2.0 | 9.091674 | 9.302113 | 9.513728 | 9.726506 | 9.940433 | 10.155498 | 10.371690 |
| 1.9 | 9.115844 | 9.325994 | 9.537325 | 9.749825 | 9.963483 | 10.178284 | 10.394216 |
| 1.8 | 9.138819 | 9.348692 | 9.559753 | 9.771990 | 9.985389 | 10.199938 | 10.415624 |
| 1.7 | 9.160592 | 9.370202 | 9.581006 | 9.792992 | 10.006146 | 10.220455 | 10.435906 |
| 1.6 | 9.181156 | 9.390517 | 9.601078 | 9.812825 | 10.025747 | 10.239829 | 10.455059 |
| 1.5 | 9.200506 | 9.409631 | 9.619962 | 9.831485 | 10.044188 | 10.258056 | 10.473076 |
| 1.4 | 9.218635 | 9.427539 | 9.637654 | 9.848967 | 10.061463 | 10.275130 | 10.489954 |
| 1.3 | 9.235539 | 9.444236 | 9.654149 | 9.865264 | 10.077568 | 10.291047 | 10.505687 |
| 1.2 | 9.251211 | 9.459716 | 9.669441 | 9.880374 | 10.092498 | 10.305802 | 10.520272 |
| 1.1 | 9.265648 | 9.473975 | 9.683527 | 9.894290 | 10.106250 | 10.319393 | 10.533704 |
| 1.0 | 9.278845 | 9.487009 | 9.696402 | 9.907010 | 10.118819 | 10.331813 | 10.545981 |
| 0.9 | 9.290797 | 9.498813 | 9.708063 | 9.918530 | 10.130202 | 10.343062 | 10.557099 |
| 0.8 | 9.301503 | 9.509385 | 9.718505 | 9.928847 | 10.140395 | 10.353135 | 10.567054 |
| 0.7 | 9.310954 | 9.518721 | 9.727726 | 9.937956 | 10.149396 | 10.362030 | 10.575845 |
| 0.6 | 9.319152 | 9.526817 | 9.735724 | 9.945857 | 10.157202 | 10.369743 | 10.583469 |
| 0.5 | 9.326094 | 9.533673 | 9.742495 | 9.952546 | 10.163810 | 10.376274 | 10.589922 |
| 0.4 | 9.331776 | 9.539284 | 9.748038 | 9.958021 | 10.169220 | 10.381620 | 10.595206 |
| 0.3 | 9.336197 | 9.543651 | 9.752351 | 9.962283 | 10.173430 | 10.385779 | 10.599316 |
| 0.2 | 9.339357 | 9.546771 | 9.755432 | 9.965326 | 10.176437 | 10.388751 | 10.602253 |
| 0.1 | 9.341253 | 9.548643 | 9.757282 | 9.967153 | 10.178242 | 10.390534 | 10.604015 |
| 0.0 | 9.341885 | 9.549267 | 9.757898 | 9.967762 | 10.178844 | 10.391129 | 10.604603 |

$u = \ln|\Gamma(x+iy)| = \Re \ln \Gamma(z)$

$\longrightarrow x$

| 9.1 | 9.2 | 9.3 | 9.4 | 9.5 | 9.6 | 9.7 | $y$ ↑ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 5.894574 | 6.152759 | 6.411439 | 6.670617 | 6.930290 | 7.190462 | 7.451131 | 10.0 |
| 6.065638 | 6.322674 | 6.580222 | 6.838276 | 7.096838 | 7.355910 | 7.615439 | 9.8 |
| 6.234671 | 6.490562 | 6.746974 | 7.003903 | 7.261352 | 7.519321 | 7.777810 | 9.6 |
| 6.401634 | 6.656376 | 6.911648 | 7.167451 | 7.423785 | 7.680651 | 7.938049 | 9.4 |
| 6.566477 | 6.820066 | 7.074198 | 7.328873 | 7.584091 | 7.839854 | 8.096159 | 9.2 |
| 6.729150 | 6.981584 | 7.234575 | 7.488121 | 7.742223 | 7.996881 | 8.252094 | 9.0 |
| 6.889601 | 7.140881 | 7.392729 | 7.645146 | 7.898131 | 8.151685 | 8.405807 | 8.8 |
| 7.047779 | 7.297903 | 7.548609 | 7.799897 | 8.051766 | 8.304216 | 8.557247 | 8.6 |
| 7.203629 | 7.452599 | 7.702163 | 7.952322 | 8.203076 | 8.454424 | 8.706366 | 8.4 |
| 7.357099 | 7.604914 | 7.853338 | 8.102370 | 8.352010 | 8.602258 | 8.853113 | 8.2 |
| 7.508130 | 7.754792 | 8.002077 | 8.249985 | 8.498515 | 8.747665 | 8.997436 | 8.0 |
| 7.656666 | 7.902178 | 8.148328 | 8.395113 | 8.642535 | 8.890591 | 9.139282 | 7.8 |
| 7.802649 | 8.047014 | 8.292031 | 8.537698 | 8.784016 | 9.030982 | 9.278597 | 7.6 |
| 7.946020 | 8.189241 | 8.433129 | 8.677683 | 8.922902 | 9.168783 | 9.415327 | 7.4 |
| 8.086717 | 8.328799 | 8.571564 | 8.815009 | 9.059134 | 9.303937 | 9.549416 | 7.2 |
| 8.224678 | 8.465627 | 8.707275 | 8.949618 | 9.192656 | 9.436387 | 9.680808 | 7.0 |
| 8.359840 | 8.599663 | 8.840200 | 9.081449 | 9.323408 | 9.566074 | 9.809445 | 6.8 |
| 8.492138 | 8.730844 | 8.970279 | 9.210441 | 9.451329 | 9.692939 | 9.935270 | 6.6 |
| 8.621509 | 8.859105 | 9.097447 | 9.336533 | 9.576359 | 9.816924 | 10.058224 | 6.4 |
| 8.747885 | 8.984382 | 9.221642 | 9.459661 | 9.698437 | 9.937966 | 10.178247 | 6.2 |
| 8.871200 | 9.106610 | 9.342798 | 9.579763 | 9.817500 | 10.056007 | 10.295279 | 6.0 |
| 8.991386 | 9.225720 | 9.460851 | 9.696774 | 9.933486 | 10.170983 | 10.409261 | 5.8 |
| 9.108374 | 9.341648 | 9.575734 | 9.810630 | 10.046331 | 10.282832 | 10.520131 | 5.6 |
| 9.220952 | 9.454324 | 9.687382 | 9.921266 | 10.155971 | 10.391494 | 10.627829 | 5.4 |
| 9.332480 | 9.563680 | 9.795727 | 10.028617 | 10.262344 | 10.496904 | 10.732293 | 5.2 |
| 9.439459 | 9.669649 | 9.900704 | 10.132617 | 10.365384 | 10.599001 | 10.833461 | 5.0 |
| 9.542961 | 9.772162 | 10.002244 | 10.233201 | 10.465029 | 10.697721 | 10.931273 | 4.8 |
| 9.642917 | 9.871150 | 10.100280 | 10.330304 | 10.561213 | 10.793004 | 11.025670 | 4.6 |
| 9.739258 | 9.966546 | 10.194747 | 10.423860 | 10.653874 | 10.884785 | 11.116588 | 4.4 |
| 9.981913 | 10.058281 | 10.285580 | 10.513806 | 10.742949 | 10.973005 | 11.203968 | 4.2 |
| 9.920813 | 10.146288 | 10.372711 | 10.600076 | 10.828376 | 11.057602 | 11.287751 | 4.0 |
| 10.005891 | 10.230501 | 10.456076 | 10.682609 | 10.910091 | 11.138517 | 11.367878 | 3.8 |
| 10.087077 | 10.310854 | 10.535611 | 10.761341 | 10.988037 | 11.215690 | 11.444293 | 3.6 |
| 10.164309 | 10.387283 | 10.611254 | 10.836213 | 11.062153 | 11.289064 | 11.516939 | 3.4 |
| 10.237520 | 10.459726 | 10.682944 | 10.907165 | 11.132381 | 11.358582 | 11.585762 | 3.2 |
| 10.306647 | 10.528121 | 10.750621 | 10.974139 | 11.198665 | 11.424191 | 11.650707 | 3.0 |
| 10.371631 | 10.592409 | 10.814229 | 11.037080 | 11.260952 | 11.485838 | 11.711726 | 2.8 |
| 10.432413 | 10.652534 | 10.873711 | 11.095934 | 11.319190 | 11.543471 | 11.768763 | 2.6 |
| 10.488934 | 10.708442 | 10.929017 | 11.150650 | 11.373328 | 11.597044 | 11.821786 | 2.4 |
| 10.541145 | 10.760080 | 10.980185 | 11.201179 | 11.423320 | 11.646510 | 11.870737 | 2.2 |
| 10.588994 | 10.807401 | 11.026898 | 11.247476 | 11.469122 | 11.691826 | 11.915578 | 2.0 |
| 10.611268 | 10.829428 | 11.048684 | 11.269024 | 11.490438 | 11.712916 | 11.936445 | 1.9 |
| 10.632435 | 10.850358 | 11.069383 | 11.289498 | 11.510692 | 11.732953 | 11.956271 | 1.8 |
| 10.652488 | 10.870188 | 11.088993 | 11.308895 | 11.529878 | 11.751934 | 11.975051 | 1.7 |
| 10.671424 | 10.888911 | 11.107510 | 11.327207 | 11.547992 | 11.769854 | 11.992780 | 1.6 |
| 10.689236 | 10.906524 | 11.124927 | 11.344433 | 11.565030 | 11.786708 | 12.009455 | 1.5 |
| 10.705921 | 10.923021 | 11.141240 | 11.360567 | 11.580988 | 11.802494 | 12.025072 | 1.4 |
| 10.721475 | 10.938399 | 11.156447 | 11.375605 | 11.595863 | 11.817208 | 12.039628 | 1.3 |
| 10.735893 | 10.952654 | 11.170542 | 11.389544 | 11.609649 | 11.830845 | 12.053120 | 1.2 |
| 10.749172 | 10.965782 | 11.183523 | 11.402381 | 11.622345 | 11.843403 | 12.065543 | 1.1 |
| 10.761308 | 10.977780 | 11.195386 | 11.414113 | 11.633948 | 11.854880 | 12.076896 | 1.0 |
| 10.772297 | 10.988645 | 11.206129 | 11.424735 | 11.644454 | 11.865271 | 12.087175 | 0.9 |
| 10.782138 | 10.998373 | 11.215747 | 11.434247 | 11.653861 | 11.874575 | 12.096380 | 0.8 |
| 10.790827 | 11.006963 | 11.224240 | 11.442646 | 11.662166 | 11.882790 | 12.104506 | 0.7 |
| 10.798362 | 11.014413 | 11.231606 | 11.449928 | 11.669369 | 11.889914 | 12.111552 | 0.6 |
| 10.804742 | 11.020719 | 11.237841 | 11.456094 | 11.675466 | 11.895945 | 12.117518 | 0.5 |
| 10.809975 | 11.025881 | 11.242944 | 11.461140 | 11.680457 | 11.900881 | 12.122400 | 0.4 |
| 10.814031 | 11.029898 | 11.246916 | 11.465066 | 11.684340 | 11.904721 | 12.126200 | 0.3 |
| 10.816930 | 11.032767 | 11.249752 | 11.467872 | 11.687114 | 11.907465 | 12.128913 | 0.2 |
| 10.818672 | 11.034489 | 11.251455 | 11.469556 | 11.688778 | 11.909111 | 12.130542 | 0.1 |
| 10.819252 | 11.035063 | 11.252023 | 11.470117 | 11.689333 | 11.909660 | 12.131085 | 0.0 |

$$u = \ln|\Gamma(x+iy)| = \Re \ln \Gamma(z)$$

$\longrightarrow x$ ; $y$ ↑

| $y$ \ $x$ | 9.8 | 9.9 | 10.0 | 10.1 | 10.2 | 10.3 | 10.4 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 10.0 | 7.712299 | 7.973966 | 8.236132 | 8.498798 | 8.761963 | 9.025628 | 9.289794 |
| 9.8 | 7.875580 | 8.136178 | 8.397289 | 8.658912 | 8.921038 | 9.183680 | 9.446829 |
| 9.6 | 8.036821 | 8.296351 | 8.556405 | 8.816979 | 9.078072 | 9.339688 | 9.601823 |
| 9.4 | 8.195979 | 8.454441 | 8.713436 | 8.972963 | 9.233021 | 9.493612 | 9.754734 |
| 9.2 | 8.353009 | 8.610402 | 8.868339 | 9.126819 | 9.385843 | 9.645410 | 9.905518 |
| 9.0 | 8.507864 | 8.764188 | 9.021068 | 9.278503 | 9.536493 | 9.795037 | 10.054135 |
| 8.8 | 8.660496 | 8.915753 | 9.171578 | 9.427969 | 9.684926 | 9.942449 | 10.200537 |
| 8.6 | 8.810858 | 9.065049 | 9.319820 | 9.575169 | 9.831096 | 10.087601 | 10.344682 |
| 8.4 | 8.958901 | 9.212028 | 9.465747 | 9.720056 | 9.974956 | 10.230445 | 10.486523 |
| 8.2 | 9.104574 | 9.356639 | 9.609309 | 9.862583 | 10.116459 | 10.370936 | 10.626015 |
| 8.0 | 9.247825 | 9.498833 | 9.750458 | 10.002700 | 10.255556 | 10.509026 | 10.763108 |
| 7.8 | 9.388604 | 9.638559 | 9.889143 | 10.140356 | 10.392198 | 10.644665 | 10.897757 |
| 7.6 | 9.526857 | 9.775764 | 10.025312 | 10.275502 | 10.526334 | 10.777805 | 11.029913 |
| 7.4 | 9.662531 | 9.910394 | 10.158912 | 10.408086 | 10.657915 | 10.908395 | 11.159525 |
| 7.2 | 9.795569 | 10.042395 | 10.289891 | 10.538056 | 10.786888 | 11.036385 | 11.286544 |
| 7.0 | 9.925918 | 10.171714 | 10.418195 | 10.665358 | 10.913202 | 11.161723 | 11.410921 |
| 6.8 | 10.053520 | 10.298295 | 10.543770 | 10.789940 | 11.036803 | 11.284359 | 11.532603 |
| 6.6 | 10.178319 | 10.422083 | 10.666559 | 10.911745 | 11.157639 | 11.404238 | 11.651539 |
| 6.4 | 10.300256 | 10.543019 | 10.786508 | 11.030721 | 11.275656 | 11.521309 | 11.767678 |
| 6.2 | 10.419274 | 10.661047 | 10.903561 | 11.146812 | 11.390800 | 11.635519 | 11.880967 |
| 6.0 | 10.535315 | 10.776109 | 11.017660 | 11.259963 | 11.503015 | 11.746813 | 11.991353 |
| 5.8 | 10.648317 | 10.888148 | 11.128749 | 11.370117 | 11.612248 | 11.855138 | 12.098785 |
| 5.6 | 10.758223 | 10.997104 | 11.236770 | 11.477218 | 11.718443 | 11.960441 | 12.203208 |
| 5.4 | 10.864972 | 11.102920 | 11.341668 | 11.581211 | 11.821545 | 12.062666 | 12.304570 |
| 5.2 | 10.968505 | 11.205536 | 11.443382 | 11.682038 | 11.921499 | 12.161761 | 12.402819 |
| 5.0 | 11.068761 | 11.304895 | 11.541857 | 11.779644 | 12.018251 | 12.257671 | 12.497901 |
| 4.8 | 11.165680 | 11.400936 | 11.637036 | 11.873972 | 12.111744 | 12.350343 | 12.589765 |
| 4.6 | 11.259204 | 11.493603 | 11.728860 | 11.964969 | 12.201926 | 12.439723 | 12.678357 |
| 4.4 | 11.349273 | 11.582837 | 11.817274 | 12.052577 | 12.288741 | 12.525758 | 12.763628 |
| 4.2 | 11.435828 | 11.668582 | 11.902222 | 12.136743 | 12.372138 | 12.608400 | 12.845525 |
| 4.0 | 11.518812 | 11.750780 | 11.983649 | 12.217413 | 12.452063 | 12.687594 | 12.923999 |
| 3.8 | 11.598167 | 11.829377 | 12.061501 | 12.294533 | 12.528465 | 12.763290 | 12.999001 |
| 3.6 | 11.673838 | 11.904319 | 12.135725 | 12.368051 | 12.601293 | 12.835438 | 13.070483 |
| 3.4 | 11.745770 | 11.975549 | 12.206268 | 12.437921 | 12.670498 | 12.903993 | 13.138398 |
| 3.2 | 11.813910 | 12.043019 | 12.273081 | 12.504089 | 12.736032 | 12.968905 | 13.202701 |
| 3.0 | 11.878206 | 12.106678 | 12.336115 | 12.566508 | 12.797850 | 13.030132 | 13.263347 |
| 2.8 | 11.938609 | 12.166477 | 12.395321 | 12.625134 | 12.855906 | 13.087629 | 13.320295 |
| 2.6 | 11.995070 | 12.222370 | 12.450657 | 12.679923 | 12.910157 | 13.141353 | 13.373503 |
| 2.4 | 12.047545 | 12.274312 | 12.502077 | 12.730831 | 12.960564 | 13.191268 | 13.422935 |
| 2.2 | 12.095991 | 12.322263 | 12.549543 | 12.777821 | 13.007088 | 13.237335 | 13.468553 |
| 2.0 | 12.140366 | 12.366182 | 12.593015 | 12.820855 | 13.049692 | 13.279518 | 13.510323 |
| 1.9 | 12.161016 | 12.386619 | 12.613242 | 12.840878 | 13.069514 | 13.299144 | 13.529755 |
| 1.8 | 12.180634 | 12.406034 | 12.632459 | 12.859899 | 13.088344 | 13.317786 | 13.548214 |
| 1.7 | 12.199217 | 12.424424 | 12.650659 | 12.877914 | 13.106179 | 13.335442 | 13.565696 |
| 1.6 | 12.216760 | 12.441784 | 12.667841 | 12.894921 | 13.123013 | 13.352109 | 13.582197 |
| 1.5 | 12.233260 | 12.458112 | 12.684003 | 12.910914 | 13.138845 | 13.367782 | 13.597715 |
| 1.4 | 12.248712 | 12.473402 | 12.699133 | 12.925892 | 13.153671 | 13.382459 | 13.612246 |
| 1.3 | 12.263114 | 12.487654 | 12.713236 | 12.939851 | 13.167488 | 13.396137 | 13.625788 |
| 1.2 | 12.276462 | 12.500862 | 12.726307 | 12.952787 | 13.180293 | 13.408812 | 13.638337 |
| 1.1 | 12.288754 | 12.513024 | 12.738343 | 12.964699 | 13.192083 | 13.420484 | 13.649892 |
| 1.0 | 12.299986 | 12.524137 | 12.749341 | 12.975584 | 13.202856 | 13.431148 | 13.660449 |
| 0.9 | 12.310156 | 12.534201 | 12.759299 | 12.985438 | 13.212610 | 13.440804 | 13.670008 |
| 0.8 | 12.319262 | 12.543210 | 12.768214 | 12.994262 | 13.221343 | 13.449448 | 13.678566 |
| 0.7 | 12.327301 | 12.551164 | 12.776085 | 13.002051 | 13.229053 | 13.457080 | 13.686120 |
| 0.6 | 12.334272 | 12.558062 | 12.782910 | 13.008806 | 13.235738 | 13.463697 | 13.692671 |
| 0.5 | 12.340174 | 12.563901 | 12.788687 | 13.014524 | 13.241397 | 13.469298 | 13.698216 |
| 0.4 | 12.345004 | 12.568680 | 12.793417 | 13.019203 | 13.246029 | 13.473853 | 13.702755 |
| 0.3 | 12.348762 | 12.572398 | 12.797096 | 13.022828 | 13.249632 | 13.477450 | 13.706286 |
| 0.2 | 12.351447 | 12.575054 | 12.799725 | 13.025445 | 13.252207 | 13.479998 | 13.708808 |
| 0.1 | 12.353058 | 12.576649 | 12.801302 | 13.027006 | 13.253752 | 13.481527 | 13.710322 |
| 0.0 | 12.353595 | 12.577180 | 12.801827 | 13.027526 | 13.254267 | 13.482037 | 13.710826 |

# PART II

$$v = \operatorname{arc} \Gamma(x+iy) = \mathfrak{Im} \ln \Gamma(z)$$

$x = -10.0(0.2)-6.0,\ \ -6.0(0.1)+6.0,$

$\quad +6.0(0.2)+10.6$

$y = 0.0(0.1)2.0, \qquad 2.0(0.2)10.0$

| y | −10.0 | −9.8 | −9.6 |
|---|---|---|---|
| 10.0 | - 8.252621 | - 7.777423 | - 7.304165 |
| 9.8 | - 8.786502 | - 8.309285 | - 7.834007 |
| 9.6 | - 9.318484 | - 8.839210 | - 8.361872 |
| 9.4 | - 9.848570 | - 9.367198 | - 8.887760 |
| 9.2 | -10.376764 | - 9.893254 | - 9.411673 |
| 9.0 | -10.903071 | -10.417382 | - 9.933617 |
| 8.8 | -11.427496 | -10.939586 | -10.453594 |
| 8.6 | -11.950047 | -11.459874 | -10.971610 |
| 8.4 | -12.470732 | -11.978253 | -11.487673 |
| 8.2 | -12.989560 | -12.494730 | -12.001791 |
| 8.0 | -13.506541 | -13.009317 | -12.513973 |
| 7.8 | -14.021687 | -13.522024 | -13.024228 |
| 7.6 | -14.535012 | -14.032863 | -13.532569 |
| 7.4 | -15.046528 | -14.541849 | -14.039008 |
| 7.2 | -15.556253 | -15.048996 | -14.543562 |
| 7.0 | -16.064202 | -15.554322 | -15.046245 |
| 6.8 | -16.570394 | -16.057843 | -15.547076 |
| 6.6 | -17.074851 | -16.559581 | -16.046074 |
| 6.4 | -17.577592 | -17.059558 | -16.543261 |
| 6.2 | -18.078643 | -17.557795 | -17.038659 |
| 6.0 | -18.578028 | -18.054317 | -17.532294 |
| 5.8 | -19.075774 | -18.549153 | -18.024192 |
| 5.6 | -19.571909 | -19.042330 | -18.514381 |
| 5.4 | -20.066465 | -19.533882 | -19.002894 |
| 5.2 | -20.559474 | -20.023838 | -19.489762 |
| 5.0 | -21.050970 | -20.512233 | -19.975022 |
| 4.8 | -21.540990 | -20.999106 | -20.458708 |
| 4.6 | -22.029570 | -21.484494 | -20.940862 |
| 4.4 | -22.516754 | -21.968439 | -21.421524 |
| 4.2 | -23.002581 | -22.450983 | -21.900739 |
| 4.0 | -23.487097 | -22.932170 | -22.378552 |
| 3.8 | -23.970348 | -23.412050 | -22.855012 |
| 3.6 | -24.452382 | -23.890672 | 23.330169 |
| 3.4 | -24.933250 | -24.368086 | -23.804077 |
| 3.2 | -25.413004 | -24.844347 | -24.276789 |
| 3.0 | -25.891696 | -25.319509 | -24.748363 |
| 2.8 | -26.369385 | -25.793631 | -25.218858 |
| 2.6 | -26.846128 | -26.265772 | -25.688337 |
| 2.4 | -27.322983 | -26.738993 | -26.156861 |
| 2.2 | -27.797013 | -27.210358 | -26.624496 |
| 2.0 | -28.271280 | -27.680930 | -27.091309 |
| 1.9 | -28.508147 | -27.915937 | -27.324427 |
| 1.8 | -28.744848 | -28.150770 | -27.557365 |
| 1.7 | -28.981390 | -28.385434 | -27.790129 |
| 1.6 | -29.217783 | -23.619932 | -28.022725 |
| 1.5 | -29.454034 | -28.854267 | -28.255159 |
| 1.4 | -29.690152 | -29.088433 | -28.487430 |
| 1.3 | -29.926146 | -29.322411 | -28.719530 |
| 1.2 | -30.162024 | -29.556158 | -28.951438 |
| 1.1 | -30.397794 | -29.789588 | -29.183102 |
| 1.0 | -30.633466 | -30.022528 | -29.414422 |
| 0.9 | -30.869048 | -30.254649 | -29.645200 |
| 0.8 | -31.104550 | -30.485322 | -29.875062 |
| 0.7 | -31.339980 | -30.713251 | -30.103309 |
| 0.6 | -31.575345 | -30.936365 | -30.328666 |
| 0.5 | -31.810658 | -31.150309 | -30.548873 |
| 0.4 | -32.045925 | -31.346438 | -30.760150 |
| 0.3 | -32.281156 | -31.508232 | -30.956843 |
| 0.2 | -32.516360 | -31.605383 | -31.132333 |
| 0.1 | -32.751546 | -31.579209 | -31.283156 |
| 0.0 | | -31.415927 | -31.415927 |

$$v = \operatorname{arc}\Gamma(x+iy) = \Im\mathrm{m} \ln \Gamma(z)$$

$\longrightarrow x$

| −9.4 | −9.2 | −9.0 | −8.8 | −8.6 | −8.4 | −8.2 | y |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| - 6.832887 | - 6.363627 | - 5.896427 | - 5.431329 | - 4.968376 | - 4.507610 | - 4.049075 | 10.0 |
| - 7.360708 | - 6.889427 | - 6.420207 | - 5.953091 | - 5.488121 | - 5.025343 | - 4.564801 | 9.8 |
| - 7.886510 | - 7.413167 | - 6.941884 | - 6.472706 | - 6.005677 | - 5.540842 | - 5.078246 | 9.6 |
| - 8.410295 | - 7.934846 | - 7.461458 | - 6.990174 | - 6.521039 | - 6.054100 | - 5.589404 | 9.4 |
| - 8.932063 | - 8.454466 | - 7.978927 | - 7.505491 | - 7.034205 | - 6.565116 | - 6.098272 | 9.2 |
| - 9.451817 | - 8.972027 | - 8.494293 | - 8.018660 | - 7.545175 | - 7.073887 | - 6.604844 | 9.0 |
| - 9.969561 | - 9.487535 | - 9.007558 | - 8.529680 | - 8.053948 | - 7.580412 | - 7.109122 | 8.8 |
| -10.485301 | -10.000990 | - 9.518725 | - 9.038554 | - 8.560526 | - 8.084691 | - 7.611101 | 8.6 |
| -10.999041 | -10.512400 | -10.027799 | - 9.545286 | - 9.064910 | - 8.586725 | - 8.110782 | 8.4 |
| -11.510789 | -11.021771 | -10.534785 | -10.049880 | - 9.567106 | - 9.086518 | - 8.608168 | 8.2 |
| -12.020555 | -11.529111 | -11.039689 | -10.552342 | -10.067118 | - 9.584074 | - 9.103262 | 8.0 |
| -12.528346 | -12.034427 | -11.542521 | -11.052678 | -10.564952 | -10.079395 | - 9.596065 | 7.8 |
| -13.034176 | -12.537732 | -12.043290 | -11.550899 | -11.060615 | -10.572492 | -10.086586 | 7.6 |
| -13.538054 | -13.039037 | -12.542006 | -12.047015 | -11.554117 | -11.063370 | -10.574831 | 7.4 |
| -14.039998 | -13.538354 | -13.038683 | -12.541036 | -12.045470 | -11.552041 | -11.060808 | 7.2 |
| -14.540021 | -14.035700 | -13.533335 | -13.032979 | -12.534686 | -12.038515 | -11.544529 | 7.0 |
| -15.038142 | -14.531092 | -14.025978 | -13.522856 | -13.021780 | -12.522811 | -12.026008 | 6.8 |
| -15.534379 | -15.024547 | -14.516631 | -14.010686 | -13.506769 | -13.004939 | -12.505257 | 6.6 |
| -16.028754 | -15.516086 | -15.005313 | -14.496489 | -13.989671 | -13.484919 | -12.982296 | 6.4 |
| -16.521289 | -16.005733 | -15.492046 | -14.980285 | -14.470507 | -13.962772 | -13.457143 | 6.2 |
| -17.012007 | -16.493510 | -15.976855 | -15.462099 | -14.949301 | -14.438519 | -13.929819 | 6.0 |
| -17.500938 | -16.979444 | -16.459765 | -15.941956 | -15.426077 | -14.912187 | -14.400350 | 5.8 |
| -17.988109 | -17.463566 | -16.940805 | -16.419884 | -15.900863 | -15.383801 | -14.868762 | 5.6 |
| -18.473550 | -17.945903 | -17.420006 | -16.895916 | -16.373691 | -15.853391 | -15.335084 | 5.4 |
| -18.957296 | -18.426491 | -17.897401 | -17.370082 | -16.844592 | -16.320994 | -15.799350 | 5.2 |
| -19.439381 | -18.905364 | -18.373025 | -17.842418 | -17.313604 | -16.786641 | -16.261594 | 5.0 |
| -19.919842 | -19.382561 | -18.846917 | -18.312964 | -17.780763 | -17.250372 | -16.721856 | 4.8 |
| -20.398721 | -19.858121 | -19.319116 | -18.781760 | -18.246112 | -17.712229 | -17.180176 | 4.6 |
| -20.876058 | -20.332088 | -19.789668 | -19.248851 | -18.709694 | -18.172256 | -17.636601 | 4.4 |
| -21.351898 | -20.804506 | -20.258616 | -19.714281 | -19.171557 | -18.630502 | -18.091178 | 4.2 |
| -21.826287 | -21.275423 | -20.726011 | -20.178101 | -19.631751 | -19.087016 | -18.543958 | 4.0 |
| -22.299277 | -21.744891 | -21.191902 | -20.640364 | -20.090329 | -19.541854 | -18.994998 | 3.8 |
| -22.770917 | -22.212960 | -21.656345 | -21.101123 | -20.547347 | -19.995072 | -19.444355 | 3.6 |
| -23.241262 | -22.679687 | -22.119396 | -21.560439 | -21.002867 | -20.446731 | -19.892091 | 3.4 |
| -23.710368 | -23.145129 | -22.581114 | -22.018370 | -21.456946 | -20.896896 | -20.338272 | 3.2 |
| -24.178295 | -23.609347 | -23.041560 | -22.474981 | -21.909655 | -21.345633 | -20.782969 | 3.0 |
| -24.645103 | -24.072404 | -23.500801 | -22.930338 | -22.361060 | -21.793014 | -21.226252 | 2.8 |
| -25.110855 | -24.534365 | -23.958903 | -23.384511 | -22.811232 | -22.239112 | -21.668198 | 2.6 |
| -25.575617 | -24.995297 | -24.415935 | -23.837572 | -23.260247 | -22.684003 | -22.108887 | 2.4 |
| -26.039457 | -25.455269 | -24.871971 | -24.289594 | -23.708180 | -23.127769 | -22.548399 | 2.2 |
| -26.502444 | -25.914359 | -25.327083 | -24.740654 | -24.155112 | -23.570491 | -22.986827 | 2.0 |
| -26.733641 | -26.143595 | -25.554316 | -24.965846 | -24.378226 | -23.791488 | -23.205661 | 1.9 |
| -26.964653 | -26.372639 | -25.781348 | -25.190826 | -24.601120 | -24.012259 | -23.424257 | 1.8 |
| -27.195490 | -26.601504 | -26.008188 | -25.415602 | -24.823803 | -24.232814 | -23.642633 | 1.7 |
| -27.426164 | -26.830202 | -26.234846 | -25.640177 | -25.046281 | -24.453169 | -23.860800 | 1.6 |
| -27.656690 | -27.058754 | -26.461331 | -25.864556 | -25.268563 | -24.673338 | -24.078783 | 1.5 |
| -27.887087 | -27.287180 | -26.687655 | -26.088738 | -25.490650 | -24.893344 | -24.296603 | 1.4 |
| -28.117380 | -27.515520 | -26.913828 | -26.312702 | -25.712536 | -25.113213 | -24.514302 | 1.3 |
| -28.347611 | -27.743835 | -27.139860 | -26.536408 | -25.934200 | -25.332991 | -24.731944 | 1.2 |
| -28.577849 | -27.972229 | -27.365761 | -26.759772 | -26.155595 | -25.552747 | -24.949637 | 1.1 |
| -28.808214 | -28.200898 | -27.591542 | -26.982625 | -26.376622 | -25.772605 | -25.167576 | 1.0 |
| -29.038923 | -28.430186 | -27.817214 | -27.204636 | -26.597084 | -25.992784 | -25.386109 | 0.9 |
| -29.270370 | -28.660745 | -28.042787 | -27.425181 | -26.816611 | -26.213679 | -25.605891 | 0.8 |
| -29.503273 | -28.893763 | -28.268273 | -27.642966 | -27.034505 | -26.436012 | -25.828136 | 0.7 |
| -29.738928 | -29.131607 | -28.493681 | -27.856021 | -27.249492 | -26.661079 | -26.055139 | 0.6 |
| -29.979613 | -29.378576 | -28.719024 | -28.059693 | -27.459317 | -26.891162 | -26.291277 | 0.5 |
| -30.229129 | -29.644061 | -28.944311 | -28.245639 | -27.660200 | -27.130064 | -26.545919 | 0.4 |
| -30.493151 | -29.942000 | -29.169555 | -28.397242 | -27.846490 | -27.383462 | -26.833005 | 0.3 |
| -30.778312 | -30.307422 | -29.394765 | -28.484196 | -28.011571 | -27.657993 | -27.187565 | 0.2 |
| -31.088102 | -30.792129 | -29.619953 | -28.447820 | -28.151979 | -27.957148 | -27.661406 | 0.1 |
| -31.415927 | -31.415927 | | -28.274334 | -28.274334 | -28.274334 | -28.274334 | 0.0 |

$$v = \operatorname{arc} \Gamma(x+iy) = \Im\mathrm{m} \ln \Gamma(z)$$

$\longrightarrow x$ ; $y \uparrow$

| y | −8.0 | −7.8 | −7.6 | −7.4 | −7.2 | −7.0 | −6.8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 10.0 | - 3.592815 | - 3.138872 | - 2.687308 | - 2.238154 | - 1.791461 | - 1.347278 | - 0.905655 |
| 9.8 | - 4.106540 | - 3.650608 | - 3.197052 | - 2.745921 | - 2.297262 | - 1.851127 | - 1.407565 |
| 9.6 | - 4.617937 | - 4.159963 | - 3.704373 | - 3.251215 | - 2.800542 | - 2.352402 | - 1.906850 |
| 9.4 | - 5.126999 | - 4.666934 | - 4.209260 | - 3.754026 | - 3.301286 | - 2.851091 | - 2.403496 |
| 9.2 | - 5.633721 | - 5.171515 | - 4.711706 | - 4.254345 | - 3.799435 | - 3.347181 | - 2.897488 |
| 9.0 | - 6.133098 | - 5.673701 | - 5.211704 | - 4.752161 | - 4.295128 | - 3.840660 | - 3.388814 |
| 8.8 | - 6.640128 | - 6.173456 | - 5.709247 | - 5.247469 | - 4.788206 | - 4.331517 | - 3.877459 |
| 8.6 | - 7.139807 | - 6.670866 | - 6.204321 | - 5.740261 | - 5.278711 | - 4.819742 | - 4.363413 |
| 8.4 | - 7.637135 | - 7.165840 | - 6.696951 | - 6.230531 | - 5.766636 | - 5.305326 | - 4.846666 |
| 8.2 | - 8.132112 | - 7.658406 | - 7.187107 | - 6.718276 | - 6.251974 | - 5.788263 | - 5.327206 |
| 8.0 | - 8.624739 | - 8.148564 | - 7.674795 | - 7.203494 | - 6.734722 | - 6.268544 | - 5.805027 |
| 7.8 | - 9.115019 | - 8.636316 | - 8.160016 | - 7.686181 | - 7.214876 | - 6.746167 | - 6.280121 |
| 7.6 | - 9.602957 | - 9.121664 | - 8.642770 | - 8.166339 | - 7.692436 | - 7.221127 | - 6.752484 |
| 7.4 | -10.088558 | - 9.604615 | - 9.123063 | - 8.643969 | - 8.167399 | - 7.693422 | - 7.222110 |
| 7.2 | -10.571831 | -10.085173 | - 9.600899 | - 9.119075 | - 8.639770 | - 8.163054 | - 7.689000 |
| 7.0 | -11.052785 | -10.563350 | -10.076285 | - 9.591661 | - 9.109551 | - 8.630023 | - 8.153154 |
| 6.8 | -11.531433 | -11.039152 | -10.549231 | -10.061739 | - 9.576750 | - 9.094334 | - 8.614571 |
| 6.6 | -12.007787 | -11.512595 | -11.019747 | -10.529316 | -10.041373 | - 9.555995 | - 9.073259 |
| 6.4 | -12.481865 | -11.983693 | -11.487848 | -10.994403 | -10.503433 | -10.015013 | - 9.529224 |
| 6.2 | -12.953684 | -12.452463 | -11.953550 | -11.457018 | -10.962943 | -10.471401 | - 9.982496 |
| 6.0 | -13.423265 | -12.918925 | -12.416871 | -11.917176 | -11.419917 | -10.925173 | -10.433028 |
| 5.8 | -13.890632 | -13.383103 | -12.877834 | -12.374900 | -11.874377 | -11.376348 | -10.880896 |
| 5.6 | -14.355812 | -13.845020 | -13.336463 | -12.830211 | -12.326344 | -11.824945 | -11.326099 |
| 5.4 | -14.818833 | -14.304709 | -13.792785 | -13.283136 | -12.775344 | -12.270990 | -11.768661 |
| 5.2 | -15.279727 | -14.762197 | -14.246832 | -13.733709 | -13.222907 | -12.714510 | -12.208607 |
| 5.0 | -15.738531 | -15.217520 | -14.698639 | -14.181959 | -13.667564 | -13.155537 | -12.645968 |
| 4.8 | -16.195281 | -15.670719 | -15.148241 | -14.629925 | -14.109853 | -13.594108 | -13.080781 |
| 4.6 | -16.650021 | -16.121833 | -15.595683 | -15.071649 | -14.549814 | -14.030262 | -13.513083 |
| 4.4 | -17.102794 | -16.570906 | -16.041008 | -15.513177 | -14.987494 | -14.464045 | -13.942919 |
| 4.2 | -17.553651 | -17.017989 | -16.484266 | -15.952557 | -15.422941 | -14.895505 | -14.703370 |
| 4.0 | -18.002642 | -17.463136 | -16.925511 | -16.389843 | -15.856210 | -15.324697 | -14.795395 |
| 3.8 | -18.449825 | -17.906402 | -17.364800 | -16.825093 | -16.287359 | -15.751681 | -15.218149 |
| 3.6 | -18.895259 | -18.347850 | -17.802196 | -17.258371 | -16.716452 | -16.176520 | -15.638665 |
| 3.4 | -19.339007 | -18.787542 | -18.237764 | -17.689743 | -17.143557 | -16.599285 | -16.057014 |
| 3.2 | -19.781136 | -19.225548 | -18.671573 | -18.119282 | -17.568748 | -17.020050 | -16.473272 |
| 3.0 | -20.221718 | -19.661943 | -19.103701 | -18.547065 | -17.992104 | -17.438896 | -16.887522 |
| 2.8 | -20.660828 | -20.096798 | -19.534225 | -18.973172 | -18.413709 | -17.855910 | -17.299853 |
| 2.6 | -21.098542 | -20.530200 | -19.963229 | -19.397690 | -18.833651 | -18.271182 | -17.710358 |
| 2.4 | -21.534945 | -20.962231 | -20.390800 | -19.820710 | -19.252025 | -18.684809 | -18.119137 |
| 2.2 | -21.970121 | -21.392980 | -20.817031 | -20.242327 | -19.668927 | -19.096895 | -18.526297 |
| 2.0 | -22.404159 | -21.822538 | -21.242016 | -20.662642 | -20.084466 | -19.507545 | -18.931948 |
| 1.9 | -22.620780 | -22.036899 | -21.454071 | -20.872343 | -20.291757 | -19.712367 | -19.134243 |
| 1.8 | -22.837151 | -22.250996 | -21.665851 | -21.081759 | -20.498750 | -19.916873 | -19.336202 |
| 1.7 | -23.053285 | -22.464840 | -21.877368 | -21.290905 | -20.705462 | -20.121077 | -19.537840 |
| 1.6 | -23.269193 | -22.678438 | -22.088632 | -21.499797 | -20.911909 | -20.324996 | -19.739167 |
| 1.5 | -23.484888 | -22.891796 | -22.299652 | -21.708454 | -21.118116 | -20.528643 | -19.940191 |
| 1.4 | -23.700382 | -23.104914 | -22.510432 | -21.916900 | -21.324111 | -20.732025 | -20.140917 |
| 1.3 | -23.915688 | -23.317775 | -22.720970 | -22.125164 | -21.529938 | -20.935187 | -20.341331 |
| 1.2 | -24.130819 | -23.530343 | -22.931247 | -22.333295 | -21.735661 | -21.138116 | -20.541400 |
| 1.1 | -24.345787 | -23.742535 | -23.141219 | -22.541366 | -21.941394 | -21.340838 | -20.741044 |
| 1.0 | -24.560607 | -23.954183 | -23.350788 | -22.749503 | -22.147335 | -21.543369 | -20.940100 |
| 0.9 | -24.775290 | -24.164962 | -23.559763 | -22.957927 | -22.353835 | -21.745726 | -21.138246 |
| 0.8 | -24.989850 | -24.374248 | -23.767774 | -23.167038 | -22.561551 | -21.947926 | -21.334862 |
| 0.7 | -25.204302 | -24.580752 | -23.974128 | -23.377560 | -22.771703 | -22.149987 | -21.528663 |
| 0.6 | -25.418657 | -24.782504 | -24.177554 | -23.590793 | -22.986587 | -22.351924 | -21.717684 |
| 0.5 | -25.632930 | -24.974858 | -24.375798 | -23.809023 | -23.210585 | -22.553756 | -21.897280 |
| 0.4 | -25.847134 | -25.149469 | -24.565086 | -24.036055 | -23.453069 | -22.755500 | -22.059114 |
| 0.3 | -26.061283 | -25.289727 | -24.739767 | -24.277569 | -23.727981 | -22.957173 | -22.186577 |
| 0.2 | -26.275391 | -25.365327 | -24.893230 | -24.540205 | -24.070358 | -23.158793 | -22.249369 |
| 0.1 | -26.489471 | -25.317590 | -25.022014 | -24.827459 | -24.532007 | -23.360378 | -22.188818 |
| 0.0 | | -25.132741 | -25.132741 | -25.132741 | -25.132741 | | -21.991149 |

$v = \text{arc}\,\Gamma(x+iy) = \Im\text{m} \ln \Gamma(z)$

$\longrightarrow x$

| −6.6 | −6.4 | −6.2 | −6.0 | −5.9 | −5.8 | −5.7 | y ↑ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| - 0.466641 | - 0.030286 | + 0.403359 | 0.834244 | 1.048636 | 1.262318 | 1.475284 | 10.0 |
| - 0.966627 | - 0.528366 | - 0.092833 | + 0.339919 | 0.555236 | 0.769837 | 0.983715 | 9.8 |
| - 1.463937 | - 1.023717 | - 0.586244 | - 0.151572 | + 0.064696 | + 0.280243 | 0.495062 | 9.6 |
| - 1.958547 | - 1.516322 | - 1.076853 | - 0.640207 | - 0.422959 | - 0.206438 | + 0.009343 | 9.4 |
| - 2.450463 | - 2.006162 | - 1.564643 | - 1.125963 | - 0.907764 | - 0.690184 | - 0.473401 | 9.2 |
| - 2.939648 | - 2,493220 | - 2.049590 | - 1.608820 | - 1.389526 | - 1.170970 | - 0.953160 | 9.0 |
| - 3.426093 | - 2.977480 | - 2.531681 | - 2.088757 | - 1.868392 | - 1.648774 | - 1.429906 | 8.8 |
| - 3.909787 | - 3.458926 | - 3.010894 | - 2.565754 | - 2.344289 | - 2.123574 | - 1.903614 | 8.6 |
| - 4.390715 | - 3.937543 | - 3.487213 | - 3.039792 | - 2.817193 | - 2.595348 | - 2.374263 | 8.4 |
| - 4.868869 | - 4.413319 | - 3.960623 | - 3.510852 | - 3.287085 | - 3.064075 | - 2.841832 | 8.2 |
| - 5.344236 | - 4.886240 | - 4.431111 | - 3.978918 | - 3.753946 | - 3.529737 | - 3.306298 | 8.0 |
| - 5.816807 | - 5.356296 | - 4.898660 | - 4.443974 | - 4.217760 | - 3.992313 | - 3.767641 | 7.8 |
| - 6.286576 | - 5.823477 | - 5.363262 | - 4.906005 | - 4.678512 | - 4.451788 | - 4.225843 | 7.6 |
| - 6.753536 | - 6.287774 | - 5.824902 | - 5.364998 | - 5.136185 | - 4.908144 | - 4.680887 | 7.4 |
| - 7.217684 | - 6.749183 | - 6.283575 | - 5.820943 | - 5.590768 | - 5.361369 | - 5.132757 | 7.2 |
| - 7.679018 | - 7.207695 | - 6.739273 | - 6.273828 | - 6.042250 | - 5.811451 | - 5.581439 | 7.0 |
| - 8.137538 | - 7.663316 | - 7.191992 | - 6.723648 | - 6.490623 | - 6.258376 | - 6.026921 | 6.8 |
| - 8.593246 | - 8.116040 | - 7.641728 | - 7.170397 | - 6.935878 | - 6.702140 | - 6.469194 | 6.6 |
| - 9.046143 | - 8.564872 | - 8.088432 | - 7.614072 | - 7.378013 | - 7.142736 | - 6.908251 | 6.4 |
| - 9.496252 | - 9.012816 | - 8.532259 | - 8.054675 | - 7.817027 | - 7.580161 | - 7.344086 | 6.2 |
| - 9.943568 | - 9.456882 | - 8.973063 | - 8.492207 | - 8.252921 | - 8.014415 | - 7.776700 | 6.0 |
| -10.388111 | - 9.898081 | - 9.410904 | - 8.926677 | - 8.685702 | - 8.445503 | - 8.206095 | 5.8 |
| -10.829897 | -10.336430 | - 9.845795 | - 9.358093 | - 9.115377 | - 8.873430 | - 8.632274 | 5.6 |
| -11.268948 | -10.771945 | -10.277752 | - 9.786472 | - 9.541558 | - 9.298212 | - 9.055250 | 5.4 |
| -11.705290 | -11.204654 | -10.706799 | -10.211831 | - 9.965465 | - 9.719861 | - 9.475036 | 5.2 |
| -12.138951 | -11.634580 | -11.132959 | -10.634194 | -10.385919 | -10.138393 | - 9.891651 | 5.0 |
| -12.569964 | -12.061757 | -11.556263 | -11.053589 | -10.803346 | -10.553851 | -10.305121 | 4.8 |
| -12.998370 | -12.486223 | -11.976746 | -11.470050 | -11.217780 | -10.966250 | -10.715473 | 4.6 |
| -13.424211 | -12.908020 | -12.394451 | -11.883616 | -11.629260 | -11.375631 | -11.122746 | 4.4 |
| -13.847535 | -13.327195 | -12.809423 | -12.294332 | -12.037828 | -11.782040 | -11.526982 | 4.2 |
| -14.268396 | -13.743801 | -13.221715 | -12.702251 | -12.443538 | -12.185526 | -11.928231 | 4.0 |
| -14.686855 | -14.157900 | -13.631388 | -13.107431 | -12.846448 | -12.586148 | -12.326549 | 3.8 |
| -15.102977 | -14.569557 | -14.038506 | -13.509938 | -13.246622 | -12.983971 | -12.722003 | 3.6 |
| -15.516834 | -14.978843 | -14.443143 | -13.909846 | -13.644135 | -13.379069 | -13.114664 | 3.4 |
| -15.928503 | -15.385838 | -14.845380 | -14.307235 | -14.039067 | -13.771522 | -13.504816 | 3.2 |
| -16.338069 | -15.790630 | -15.245303 | -14.702196 | -14.431509 | -14.161422 | -13.891948 | 3.0 |
| -16.745623 | -16.193309 | -15.643008 | -15.094824 | -14.821559 | -14.548867 | -14.276762 | 2.8 |
| -17.151261 | -16.593976 | -16.038597 | -15.485225 | -15.209325 | -14.933967 | -14.659166 | 2.6 |
| -17.555087 | -16.992738 | -16.432183 | -15.873514 | -15.594920 | -15.316837 | -15.039281 | 2.4 |
| -17.957210 | -17.389710 | -16.823881 | -16.259813 | -15.978471 | -15.697606 | -15.417234 | 2.2 |
| -18.357747 | -17.785013 | -17.213820 | -16.644252 | -16.360108 | -16.076407 | -15.793163 | 2.0 |
| -18.557457 | -17,982078 | -17.408172 | -16.835817 | -16.550252 | -16.265113 | -15.980412 | 1.9 |
| -18.756815 | -18.178776 | -17.602136 | -17.026970 | -16.739972 | -16.453380 | -16.167221 | 1.8 |
| -18.955837 | -18.375124 | -17.795734 | -17.217729 | -16.929282 | -16.641226 | -16.353574 | 1.7 |
| -19.154536 | -18.571143 | -17.988986 | -17.408114 | -17.118201 | -16.828665 | -16.539520 | 1.6 |
| -19.352923 | -18.766854 | -18.181919 | -17.598143 | -17.306745 | -17.015710 | -16.725061 | 1.5 |
| -19.551008 | -18.962286 | -18.374567 | -17.787837 | -17.494924 | -17.202370 | -16.910204 | 1.4 |
| -19.748790 | -19.157473 | -18.566976 | -17.977217 | -17.682742 | -17.388636 | -17.094944 | 1.3 |
| -19.946256 | -19.352465 | -18.759217 | -18.166302 | -17.870190 | -17.574479 | -17.279252 | 1.2 |
| -20.143365 | -19.547341 | -18.951407 | -18.355113 | -18.057228 | -17.759827 | -17.463055 | 1.1 |
| -20.340023 | -19.742231 | -19.143748 | -18.543673 | -18.243768 | -17.944519 | -17.646196 | 1.0 |
| -20.536043 | -19.937361 | -19.336597 | -18.732003 | -18.429618 | -18.128242 | -17.828363 | 0.9 |
| -20.731059 | -20.133135 | -19.530616 | -18.920126 | -18.614406 | -18.310378 | -18.008949 | 0.8 |
| -20.924382 | -20.330281 | -19.727027 | -19.108063 | -18.797392 | -18.489650 | -18.186809 | 0.7 |
| -21.114745 | -20.530105 | -19.928136 | -19.295834 | -18.977128 | -18.664098 | -18.357301 | 0.6 |
| -21.299900 | -20.734895 | -20.138325 | -19.483471 | -19.150718 | -18.829085 | -18.523988 | 0.5 |
| -21.476076 | -20.948464 | -20.366974 | -19.670988 | -19.312104 | -18.976277 | -18.672332 | 0.4 |
| -21.637627 | -21.176494 | -20.628031 | -19.858411 | -19.447496 | -19.089073 | -18.792954 | 0.3 |
| -21.777947 | -21.425633 | -20.956536 | -20.045764 | -19.520694 | -19.135180 | -18.868867 | 0.2 |
| -21.893579 | -21.699379 | -21.404303 | -20.233070 | -19.416323 | -19.061930 | -18.884517 | 0.1 |
| -21.991149 | -21.991149 | -21.991149 | | -18.849556 | -18.849556 | -18.849556 | 0.0 |

$$v=\mathrm{arc}\,\Gamma(x+iy)=\mathfrak{Im}\ln\Gamma(z)$$

$\longrightarrow x$

| $y$ ↑ | −5.6 | −5.5 | −5.4 | −5.3 | −5.2 | −5.1 | −5.0 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 10.0 | 1.687528 | 1.899042 | 2.109823 | 2.319861 | 2.529151 | 2.737686 | 2.945460 |
| 9.8 | 1.196867 | 1.409281 | 1.620954 | 1.831879 | 2.042047 | 2.251453 | 2.460090 |
| 9.6 | 0.709146 | 0.922488 | 1.135082 | 1.346919 | 1.557993 | 1.768297 | 1.977824 |
| 9.4 | + 0.224394 | + 0.438692 | 0.652233 | 0.865011 | 1.077020 | 1.288248 | 1.498694 |
| 9.2 | - 0.257364 | - 0.042082 | + 0.172436 | + 0.386185 | 0.599156 | 0.811342 | 1.022735 |
| 9.0 | - 0.736102 | - 0.519806 | - 0.304279 | - 0.089530 | + 0.124436 | + 0.337608 | 0.549979 |
| 8.8 | - 1.211796 | - 0.994454 | - 0.777888 | - 0.562105 | - 0.347114 | - 0.132923 | + 0.080458 |
| 8.6 | - 1.684420 | - 1.465999 | - 1.248360 | - 1.031511 | - 0.815462 | - 0.600220 | - 0.385794 |
| 8.4 | - 2.153950 | - 1.934417 | - 1.715670 | - 1.497722 | - 1.280579 | - 1.064251 | - 0.848746 |
| 8.2 | - 2.620364 | - 2.399682 | - 2.179793 | - 1.960708 | - 1.742435 | - 1.524984 | - 1.308365 |
| 8.0 | - 3.083639 | - 2.861771 | - 2.640703 | - 2.420445 | - 2.201005 | - 1.982393 | - 1.764621 |
| 7.8 | - 3.543754 | - 3.320662 | - 3.098375 | - 2.876904 | - 2.656258 | - 2.436448 | - 2.217482 |
| 7.6 | - 4.000688 | - 3.776333 | - 3.552788 | - 3.330064 | - 3.108170 | - 2.887118 | - 2.666920 |
| 7.4 | - 4.454422 | - 4.228762 | - 4.003917 | - 3.779898 | - 3.556715 | - 3.334380 | - 3.112904 |
| 7.2 | - 4.904940 | - 4.677933 | - 4.451744 | - 4.226386 | - 4.001869 | - 3.778206 | - 3.555408 |
| 7.0 | - 5.352226 | - 5.123826 | - 4.896247 | - 4.669506 | - 4.443610 | - 4.218573 | - 3.994406 |
| 6.8 | - 5.796267 | - 5.566429 | - 5.337416 | - 5.109242 | - 4.881918 | - 4.655458 | - 4.429872 |
| 6.6 | - 6.237051 | - 6.005726 | - 5.775229 | - 5.545575 | - 5.316773 | - 5.088839 | - 4.861785 |
| 6.4 | - 6.674570 | - 6.441708 | - 6.209677 | - 5.978490 | - 5.748160 | - 5.518700 | - 5.290125 |
| 6.2 | - 7.108818 | - 6.874368 | - 6.640750 | - 6.407976 | - 6.176065 | - 5.945025 | - 5.714872 |
| 6.0 | - 7.539790 | - 7.303699 | - 7.068440 | - 6.834028 | - 6.600477 | - 6.367800 | - 6.136013 |
| 5.8 | - 7.967489 | - 7.729701 | - 7.492746 | - 7.256637 | - 7.021388 | - 6.787016 | - 6.553535 |
| 5.6 | - 8.391918 | - 8.152377 | - 7.913667 | - 7.675802 | - 7.438797 | - 7.202668 | - 6.967430 |
| 5.4 | - 8.183085 | - 8.571732 | - 8.331207 | - 8.091525 | - 7.852701 | - 7.614753 | - 7.377695 |
| 5.2 | - 9.231003 | - 8.987778 | - 8.745377 | - 8.503815 | - 8.263109 | - 8.023275 | - 7.784329 |
| 5.0 | - 9.645690 | - 9.400531 | - 9.156190 | - 8.912683 | - 8.670028 | - 8.428241 | - 8.187340 |
| 4.8 | -10.057168 | - 9.810011 | - 9.563666 | - 9.318148 | - 9.073476 | - 8.829667 | - 8.586738 |
| 4.6 | -10.465467 | -10.216247 | - 9.967830 | - 9.720233 | - 9.473473 | - 9.227570 | - 8.982540 |
| 4.4 | -10.870621 | -10.619271 | -10.368715 | -10.118968 | - 9.870049 | - 9.621978 | - 9.374772 |
| 4.2 | -11.272671 | -11.019124 | -10.766358 | -10.514391 | -10.263240 | -10.012926 | - 9.763465 |
| 4.0 | -11.671668 | -11.415854 | -11.160808 | -10.906548 | -10.653089 | -10.400454 | -10.148661 |
| 3.8 | -12.067666 | -11.809517 | -11.552119 | -11.295490 | -11.039649 | -10.784615 | -10.530408 |
| 3.6 | -12.460731 | -12.200176 | -11.940353 | -11.681282 | -11.422980 | -11.165468 | -10.908765 |
| 3.4 | -12.850937 | -12.587904 | -12.325584 | -12.063995 | -11.803155 | -11.543084 | -11.283802 |
| 3.2 | -13.238364 | -12.972784 | -12.707893 | -12.443711 | -12.180254 | -11.917544 | -11.655600 |
| 3.0 | -13.623104 | -13.354907 | -13.087373 | -12.820522 | -12.554371 | -12.288941 | -12.024250 |
| 2.8 | -14.005259 | -13.734375 | -13.464127 | -13.194532 | -12.925609 | -12.657379 | -12.389858 |
| 2.6 | -14.384939 | -14.111300 | -13.838266 | -13.565855 | -13.294084 | -13.022973 | -12.752540 |
| 2.4 | -14.762265 | -14.485805 | -14.209916 | -13.934617 | -13.659924 | -13.385854 | -13.112428 |
| 2.2 | -15.137368 | -14.858023 | -14.579213 | -14.300957 | -14.023267 | -13.746164 | -13.469665 |
| 2.0 | -15.510389 | -15.228098 | -14.946305 | -14.665024 | -14.384269 | -14.104060 | -13.824410 |
| 1.9 | -15.696164 | -15.412379 | -15.129073 | -14.846256 | -14.563944 | -14.282154 | -14.000901 |
| 1.8 | -15.881475 | -15.596185 | -15.311351 | -15.026984 | -14.743098 | -14.459710 | -14.176834 |
| 1.7 | -16.066341 | -15.779533 | -15.493161 | -15.207232 | -14.921757 | -14.636752 | -14.352234 |
| 1.6 | -16.250779 | -15.962448 | -15.674529 | -15.387026 | -15.099947 | -14.813306 | -14.527124 |
| 1.5 | -16.434807 | -16.144949 | -15.855481 | -15.566398 | -15.277701 | -14.989402 | -14.701530 |
| 1.4 | -16.618438 | -16.327061 | -16.036051 | -15.745385 | -15.455056 | -15.165075 | -14.875477 |
| 1.3 | -16.801678 | -16.508807 | -16.216279 | -15.924041 | -15.632066 | -15.340366 | -15.048993 |
| 1.2 | -16.984517 | -16.690209 | -16.396221 | -16.102441 | -15.808809 | -15.515335 | -15.222104 |
| 1.1 | -17.166921 | -16.871294 | -16.575961 | -16.280708 | -15.985407 | -15.690069 | -15.394840 |
| 1.0 | -17.348802 | -17.052084 | -16.755635 | -16.459047 | -16.162068 | -15.864706 | -15.567229 |
| 0.9 | -17.529978 | -17.232606 | -16.935477 | -16.637808 | -16.339159 | -16.039488 | -15.739301 |
| 0.8 | -17.710090 | -17.412886 | -17.115898 | -16.817689 | -16.517346 | -16.214841 | -15.911085 |
| 0.7 | -17.888455 | -17.592947 | -17.297631 | -16.999847 | -16.697862 | -16.391549 | -16.082612 |
| 0.6 | -18.063813 | -17.772813 | -17.481989 | -17.186492 | -16.883017 | -16.571139 | -16.253913 |
| 0.5 | -18.233921 | -17.952526 | -17.671269 | -17.381614 | -17.077203 | -16.756532 | -16.425019 |
| 0.4 | -18.395015 | -18.132098 | -17.869290 | -17.592303 | -17.289808 | -16.953854 | -16.595963 |
| 0.3 | -18.541458 | -18.311561 | -18.081742 | -17.830445 | -17.534788 | -17.176948 | -16.766777 |
| 0.2 | -18.666648 | -18.490937 | -18.315280 | -18.113227 | -17.847190 | -17.462061 | -16.937492 |
| 0.1 | -18.767136 | -18.670257 | -18.573410 | -18.456113 | -18.278839 | -17.924628 | -17.108142 |
| 0.0 | -18.849556 | -18.849556 | -18.849556 | -18.849556 | -18.849556 | -18.849556 | |

$v = \operatorname{arc} \Gamma(x+iy) = \Im\mathrm{m} \ln \Gamma(z)$

$\longrightarrow x$

| −4.9 | −4.8 | −4.7 | −4.6 | −4.5 | −4.4 | −4.3 | y |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 3.152466 | 3.358698 | 3.564149 | 3.768813 | 3.972682 | 4.175753 | 4.378017 | 10.0 |
| 2.667951 | 2.875029 | 3.081317 | 3.286809 | 3.491497 | 3.695377 | 3.898441 | 9.8 |
| 2.186566 | 2.394517 | 2.601670 | 2.808017 | 3.013552 | 3.218267 | 3.422156 | 9.6 |
| 1.708347 | 1.917199 | 2.125244 | 2.332475 | 2.538885 | 2.744464 | 2.949206 | 9.4 |
| 1.233327 | 1.443110 | 1.652078 | 1.860221 | 2.067534 | 2.274006 | 2.479633 | 9.2 |
| 0.761541 | 0.972286 | 1.182206 | 1.391293 | 1.599540 | 1.806937 | 2.013476 | 9.0 |
| + 0.293025 | 0.504761 | 0.715667 | 0.925729 | 1.134942 | 1.343295 | 1.550780 | 8.8 |
| - 0.172194 | + 0.040573 | + 0.252496 | 0.463569 | 0.673781 | 0.883123 | 1.091589 | 8.6 |
| - 0.634075 | - 0.420246 | - 0.207269 | + 0.004849 | + 0.216095 | + 0.426464 | 0.635943 | 8.4 |
| - 1.092587 | - 0.877659 | - 0.663591 | - 0.450392 | - 0.238074 | - 0.026644 | 0.183887 | 8.2 |
| - 1.547697 | - 1.331632 | - 1.116435 | - 0.902117 | - 0.688688 | - 0.476157 | - 0.264536 | 8.0 |
| - 1.999373 | - 1.782131 | - 1.565765 | - 1.350287 | - 1.135706 | - 0.922034 | - 0.709282 | 7.8 |
| - 2.447584 | - 2.229122 | - 2.011546 | - 1.794865 | - 1.579092 | - 1.364236 | - 1.150310 | 7.6 |
| - 2.892298 | - 2.672574 | - 2.453742 | - 2.235815 | - 2.018803 | - 1.802719 | - 1.587575 | 7.4 |
| - 3.333487 | - 3.112454 | - 2.892321 | - 2.673101 | - 2.454806 | - 2.237446 | - 2.021037 | 7.2 |
| - 3.771121 | - 3.548732 | - 3.327251 | - 3.106689 | - 2.887061 | - 2.668376 | - 2.450653 | 7.0 |
| - 4.205176 | - 3.981381 | - 3.758500 | - 3.536547 | - 3.315535 | - 3.095476 | - 2.876385 | 6.8 |
| - 4.635625 | - 4.410373 | - 4.186040 | - 3.962641 | - 3.740191 | - 3.518703 | - 3.298192 | 6.6 |
| - 5.062447 | - 4.835682 | - 4.609843 | - 4.384944 | - 4.161000 | - 3.938026 | - 3.716037 | 6.4 |
| - 5.485621 | - 5.257287 | - 5.029884 | - 4.803427 | - 4.577931 | - 4.353412 | - 4.129884 | 6.2 |
| - 5.905130 | - 5.675168 | - 5.446141 | - 5.218065 | - 4.990956 | - 4.764829 | - 4.539702 | 6.0 |
| - 6.320961 | - 6.089308 | - 5.858595 | - 5.628837 | - 5.400049 | - 5.172251 | - 4.945457 | 5.8 |
| - 6.733101 | - 6.499694 | - 6.267230 | - 6.035723 | - 5.805191 | - 5.575652 | - 5.347123 | 5.6 |
| - 7.141144 | - 6.906319 | - 6.672035 | - 6.438710 | - 6.206363 | - 5.975012 | - 5.744676 | 5.4 |
| - 7.546291 | - 7.309175 | - 7.073002 | - 6.837788 | - 6.603554 | - 6.370317 | - 6.138097 | 5.2 |
| - 7.947342 | - 7.708264 | - 7.470129 | - 7.232953 | - 6.996754 | - 6.761553 | - 6.527371 | 5.0 |
| - 8.344708 | - 8.103595 | - 7.863420 | - 7.624202 | - 7.385960 | - 7.148715 | - 6.912489 | 4.8 |
| - 8.738403 | - 8.495178 | - 8.252886 | - 8.011546 | - 7.771179 | - 7.531805 | - 7.293449 | 4.6 |
| - 9.128451 | - 8.883034 | - 8.638543 | - 8.394998 | - 8.152419 | - 7.910831 | - 7.670255 | 4.4 |
| - 9.514880 | - 9.267190 | - 9.020416 | - 8.774580 | - 8.529703 | - 8.285809 | - 8.042920 | 4.2 |
| - 9.897730 | - 9.647683 | - 9.398541 | - 9.150325 | - 8.903058 | - 8.656764 | - 8.411468 | 4.0 |
| -10.277049 | -10.024558 | - 9.772959 | - 9.522273 | - 9.272523 | - 9.023733 | - 8.775930 | 3.8 |
| -10.652893 | -10.397872 | -10.143726 | - 9.890476 | - 9.638147 | - 9.386763 | - 9.136349 | 3.6 |
| -11.025331 | -10.767692 | -10.510907 | -10.254999 | - 9.999993 | - 9.745913 | - 9.492785 | 3.4 |
| -11.394443 | -11.134095 | -10.874579 | -10.615917 | -10.358134 | -10.101256 | - 9.845308 | 3.2 |
| -11.760321 | -11.497175 | -11.234833 | -10.973321 | -10.712661 | -10.452879 | -10.194003 | 3.0 |
| -12.123069 | -11.857034 | -11.591775 | -11.327314 | -11.063676 | -10.800886 | -10.538972 | 2.8 |
| -12.482807 | -12.213793 | -11.945522 | -11.678016 | -11.411300 | -11.145397 | -10.880334 | 2.6 |
| -12.839664 | -12.567585 | -12.296211 | -12.025564 | -11.755668 | -11.486548 | -11.218229 | 2.4 |
| -13.193790 | -12.918557 | -12.643990 | -12.370109 | -12.096937 | -11.824497 | -11.552814 | 2.2 |
| -13.545342 | -13.266874 | -12.989026 | -12.711820 | -12.435276 | -12.159418 | -11.884268 | 2.0 |
| -13.720206 | -13.440090 | -13.160570 | -12.881669 | -12.603406 | -12.325804 | -12.048882 | 1.9 |
| -13.894494 | -13.612708 | -13.331497 | -13.050880 | -12.770878 | -12.491509 | -12.212792 | 1.8 |
| -14.068226 | -13.784751 | -13.501828 | -13.219478 | -12.937717 | -12.656561 | -12.376027 | 1.7 |
| -14.241426 | -13.956240 | -13.671587 | -13.387486 | -13.103951 | -12.820992 | -12.538621 | 1.6 |
| -14.414116 | -14.127193 | -13.840792 | -13.554928 | -13.269609 | -12.984835 | -12.700611 | 1.5 |
| -14.586311 | -14.297626 | -14.009458 | -13.721824 | -13.434721 | -13.148132 | -12.862045 | 1.4 |
| -14.758023 | -14.467537 | -14.177587 | -13.888188 | -13.599318 | -13.310931 | -13.022982 | 1.3 |
| -14.929251 | -14.636905 | -14.345156 | -14.054018 | -13.763432 | -13.473297 | -13.183510 | 1.2 |
| -15.099960 | -14.805663 | -14.512101 | -14.219287 | -13.927097 | -13.635322 | -13.343757 | 1.1 |
| -15.270071 | -14.973662 | -14.678274 | -14.383918 | -14.090345 | -13.797153 | -13.503941 | 1.0 |
| -15.439401 | -15.140594 | -14.843373 | -14.547737 | -14.253212 | -13.959033 | -13.664422 | 0.9 |
| -15.607585 | -15.305852 | -15.006797 | -14.710394 | -14.415734 | -14.121383 | -13.825909 | 0.8 |
| -15.773891 | -15.468166 | -15.167412 | -14.871217 | -14.577947 | -14.284949 | -13.989570 | 0.7 |
| -15.936882 | -15.625587 | -15.323086 | -15.028956 | -14.739887 | -14.451053 | 14.157627 | 0.6 |
| -16.093669 | -15.773486 | -15.469890 | -15.181378 | -14.901593 | -14.622006 | -14.334083 | 0.5 |
| -16.238204 | -15.903541 | -15.600800 | -15.324730 | -15.063105 | -14.801636 | -14.526039 | 0.4 |
| -16.356707 | -15.999158 | -15.703992 | -15.453386 | -15.224459 | -14.995648 | -14.745396 | 0.3 |
| -16.412987 | -16.028056 | -15.762348 | -15.560755 | -15.388569 | -15.210708 | -15.009352 | 0.2 |
| -16.291678 | -15.937577 | -15.760467 | 15.643399 | -15.546844 | -15.450334 | -15.333386 | 0.1 |
| -15.707963 | -15.707963 | -15.707963 | -15.707963 | -15.707963 | -15.707963 | -15.707963 | 0.0 |

$$v = \operatorname{arc} \Gamma(x+iy) = \Im\mathrm{m} \ln \Gamma(z)$$

$\longrightarrow x$

| $y$ | −4.2 | −4.1 | −4.0 | −3.9 | −3.8 | −3.7 | −3.6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 10.0 | 4.579466 | 4.780098 | 4.979904 | 5.178878 | 5.377014 | 5.574306 | 5.770748 |
| 9.8 | 4.100680 | 4.302090 | 4.502664 | 4.702395 | 4.901276 | 5.099301 | 5.296465 |
| 9.6 | 3.625212 | 3.827427 | 4.028795 | 4.229309 | 4.428961 | 4.627746 | 4.825656 |
| 9.4 | 3.153106 | 3.356153 | 3.558343 | 3.759667 | 3.960117 | 4.159688 | 4.358372 |
| 9.2 | 2.684404 | 2.888314 | 3.091354 | 3.293516 | 3.494794 | 3.695179 | 3.894665 |
| 9.0 | 2.219151 | 2.423953 | 2.627874 | 2.830906 | 3.033040 | 3.234269 | 3.434587 |
| 8.8 | 1.757391 | 1.963117 | 2.167950 | 2.371884 | 2.574904 | 2.777010 | 2.978190 |
| 8.6 | 1.299167 | 1.505850 | 1.711630 | 1.916496 | 2.120440 | 2.323454 | 2.525529 |
| 8.4 | 0.844525 | 1.052201 | 1.258961 | 1.464796 | 1.669696 | 1.873653 | 2.076659 |
| 8.2 | + 0.393511 | 0.602216 | 0.809993 | 1.016834 | 1.222727 | 1.427664 | 1.631635 |
| 8.0 | − 0.053833 | + 0.155941 | + 0.364775 | 0.572659 | 0.779584 | 0.985539 | 1.190514 |
| 7.8 | − 0.497459 | − 0.286577 | − 0.076645 | + 0.132324 | + 0.340320 | 0.547334 | 0.753353 |
| 7.6 | − 0.937324 | − 0.725289 | − 0.514218 | − 0.304122 | − 0.095009 | + 0.113105 | + 0.320212 |
| 7.4 | − 1.373381 | − 1.160150 | − 0.947894 | − 0.736624 | − 0.526353 | − 0.317091 | − 0.108852 |
| 7.2 | − 1.805588 | − 1.591113 | − 1.377624 | − 1.165134 | − 0.953655 | − 0.743200 | − 0.533780 |
| 7.0 | − 2.233900 | − 2.018132 | − 1.803360 | − 1.589599 | − 1.376862 | − 1.165163 | − 0.954513 |
| 6.8 | − 2.658275 | − 2.441160 | − 2.225053 | − 2.009969 | − 1.795922 | − 1.582924 | − 1.370991 |
| 6.6 | − 3.073670 | − 2.860154 | − 2.642657 | − 2.426194 | − 2.210780 | − 1.996429 | − 1.783156 |
| 6.4 | − 3.495047 | − 3.275071 | − 3.056125 | − 2.838225 | − 2.621385 | − 2.405621 | − 2.190948 |
| 6.2 | − 3.907366 | − 3.685870 | − 3.465413 | − 3.246012 | − 3.027685 | − 2.810445 | − 2.594311 |
| 6.0 | − 4.315589 | − 4.092509 | − 3.870478 | − 3.649512 | − 3.429631 | − 3.210849 | − 2.993186 |
| 5.8 | − 4.719685 | − 4.494953 | − 4.271279 | − 4.048681 | − 3.827175 | − 3.606782 | − 3.387519 |
| 5.6 | − 5.119622 | − 4.893168 | − 4.667779 | − 4.443474 | − 4.220271 | − 3.998193 | − 3.777256 |
| 5.4 | − 5.515373 | − 5.287122 | − 5.059943 | − 4.833455 | − 4.608880 | − 4.385037 | − 4.162346 |
| 5.2 | − 5.906915 | − 5.676789 | − 5.447740 | − 5.219791 | − 4.992959 | − 4.767270 | − 4.542742 |
| 5.0 | − 6.294229 | − 6.062146 | − 5.831145 | − 5.601248 | − 5.372476 | − 5.144852 | − 4.918401 |
| 4.8 | − 6.677303 | − 6.443178 | − 6.210138 | − 5.978205 | − 5.747401 | − 5.517752 | − 5.289281 |
| 4.6 | − 7.056131 | − 6.819875 | − 6.584703 | 6.350640 | − 6.117710 | − 5.885939 | − 5.655351 |
| 4.4 | − 7.430714 | − 7.192232 | − 6.954834 | − 6.718545 | − 6.483389 | − 6.249393 | − 6.016584 |
| 4.2 | − 7.801061 | − 7.560258 | − 7.320533 | − 7.081913 | − 6.844427 | − 6.608101 | − 6.372962 |
| 4.0 | − 8.167192 | − 7.923964 | − 7.681809 | − 7.440755 | − 7.200829 | − 6.962059 | − 6.724475 |
| 3.8 | − 8.529135 | − 8.283379 | − 8.038686 | − 7.795085 | − 7.552605 | − 7.311275 | − 7.071127 |
| 3.6 | − 8.886932 | − 8.638539 | − 8.391196 | − 8.144933 | − 7.899781 | − 7.655769 | − 7.412930 |
| 3.4 | − 9.240636 | − 8.989494 | − 8.739386 | − 8.490343 | − 8.242396 | − 7.995576 | − 7.749915 |
| 3.2 | − 9.590317 | − 9.336312 | − 9.083321 | − 8.831374 | − 8.580505 | − 8.330745 | − 8.082127 |
| 3.0 | − 9.936057 | − 9.679072 | − 9.423077 | − 9.168103 | − 8.914181 | − 8.661346 | − 8.409630 |
| 2.8 | −10.277958 | −10.017877 | − 9.758754 | − 9.500622 | − 9.243516 | − 8.987467 | − 8.732510 |
| 2.6 | −10.616139 | −10.352841 | −10.090467 | − 9.829050 | − 9.568623 | − 9.309220 | − 9.050875 |
| 2.4 | −10.950739 | −10.684104 | −10.418355 | −10.153523 | − 9.889640 | − 9.626740 | − 9.364859 |
| 2.2 | −11.281915 | −11.011827 | −10.742579 | −10.474203 | −10.206727 | − 9.940189 | − 9.674622 |
| 2.0 | −11.609850 | −11.336194 | −11.063324 | −10.791273 | −10.520072 | −10.249754 | − 9.980354 |
| 1.9 | −11.772666 | −11.497282 | −11.222455 | −10.948520 | −10.675406 | −10.403147 | −10.131777 |
| 1.8 | −11.934750 | −11.657410 | −11.380797 | −11.104946 | −10.829886 | −10.555651 | −10.282276 |
| 1.7 | −12.096135 | −11.816910 | −11.538380 | −11.260579 | −10.983541 | −10.707297 | −10.431883 |
| 1.6 | −12.256853 | −11.975714 | −11.695234 | −11.415449 | −11.136397 | −10.858114 | −10.580630 |
| 1.5 | −12.416946 | −12.133861 | −11.851394 | −11.569587 | −11.288485 | −11.008130 | −10.728550 |
| 1.4 | −12.576458 | −12.291393 | −12.006893 | −11.723018 | −11.439827 | −11.157369 | −10.875672 |
| 1.3 | −12.735452 | −12.448361 | −12.161768 | −11.875762 | −11.590433 | −11.305843 | −11.022021 |
| 1.2 | −12.894015 | −12.604833 | −12.316057 | −12.027829 | −11.740291 | −11.453542 | −11.167607 |
| 1.1 | −13.052279 | −12.760908 | −12.469798 | −12.179196 | −11.889347 | −11.600413 | −11.312417 |
| 1.0 | −13.210464 | −12.916736 | −12.623032 | −12.329795 | −12.037465 | −11.746322 | −11.456386 |
| 0.9 | −13.368946 | −13.072568 | −12.775801 | −12.479457 | −12.184349 | −11.890978 | −11.599355 |
| 0.8 | −13.528403 | −13.228843 | −12.928147 | −12.627830 | −12.329408 | −12.033801 | −11.740992 |
| 0.7 | −13.690080 | −13.386359 | −13.080115 | −12.774195 | −12.471386 | −12.173669 | −11.880640 |
| 0.6 | −13.856301 | −13.546655 | −13.231749 | −12.917132 | −12.608350 | −12.308467 | −12.017066 |
| 0.5 | −14.031470 | −13.712666 | −13.383095 | −13.053766 | −12.735686 | −12.434282 | −12.148056 |
| 0.4 | −14.224988 | −13.890533 | −13.534201 | −13.178063 | −12.845089 | −12.544109 | −12.269876 |
| 0.3 | −14.450824 | −14.094111 | −13.685112 | −13.276263 | −12.919985 | −12.626143 | −12.376918 |
| 0.2 | −14.744040 | −14.359663 | −13.835878 | −13.312188 | −12.928106 | −12.663283 | −12.462613 |
| 0.1 | −15.156475 | −14.802641 | −13.986547 | −13.170491 | −12.816814 | −12.640147 | −12.523542 |
| 0.0 | −15.707963 | −15.707963 | | −12.566371 | −12.566371 | −12.566371 | −12.566371 |

$$v = \operatorname{arc} \Gamma(x+iy) = \Im\mathfrak{m} \ln \Gamma(z)$$

$\longrightarrow x$

| −3.5 | −3.4 | −3.3 | −3.2 | −3.1 | −3.0 | −2.9 | $y$ ↑ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 5.966332 | 6.161056 | 6.354911 | 6.547891 | 6.739991 | 6.931207 | 7.121531 | 10.0 |
| 5.492759 | 5.688178 | 5.882717 | 6.076368 | 6.269126 | 6.460984 | 6.651937 | 9.8 |
| 5.022685 | 5.218826 | 5.414073 | 5.608419 | 5.801857 | 5.994382 | 6.185988 | 9.6 |
| 4.556163 | 4.753051 | 4.949032 | 5.144099 | 5.338243 | 5.531461 | 5.723742 | 9.4 |
| 4.093244 | 4.290908 | 4.487651 | 4.683465 | 4.878342 | 5.072277 | 5.265262 | 9.2 |
| 3.633984 | 3.832452 | 4.029985 | 4.226575 | 4.422214 | 4.616894 | 4.810610 | 9.0 |
| 3.178435 | 3.377739 | 3.576092 | 3.773488 | 3.969918 | 4.165373 | 4.359849 | 8.8 |
| 2.726656 | 2.926826 | 3.126033 | 3.324266 | 3.521517 | 3.717779 | 3.913043 | 8.6 |
| 2.278701 | 2.479773 | 2.679866 | 2.878969 | 3.077076 | 3.274177 | 3.470263 | 8.4 |
| 1.834629 | 2.036638 | 2.237653 | 2.437663 | 2.636660 | 2.834634 | 3.031576 | 8.2 |
| 1.394498 | 1.597483 | 1.799457 | 2.000411 | 2.200335 | 2.399219 | 2.597053 | 8.0 |
| 0.958368 | 1.162368 | 1.365341 | 1.567279 | 1.768169 | 1.968002 | 2.166768 | 7.8 |
| 0.526299 | 0.731357 | 0.935371 | 1.138334 | 1.340233 | 1.541056 | 1.740793 | 7.6 |
| + 0.098353 | - 0.304512 | 0.509614 | 0.713646 | 0.916596 | 1.118454 | 1.319207 | 7.4 |
| - 0.325410 | - 0.118101 | + 0.088134 | + 0.293283 | 0.497332 | 0.700271 | 0.902085 | 7.2 |
| - 0.744927 | - 0.536416 | - 0.328999 | - 0.122684 | + 0.082514 | + 0.286583 | 0.489508 | 7.0 |
| - 1.160137 | - 0.950374 | - 0.741719 | - 0.534184 | - 0.327784 | - 0.122533 | + 0.081556 | 6.8 |
| - 1.570976 | - 1.359904 | - 1.149956 | - 0.941145 | - 0.733487 | - 0.526997 | - 0.321689 | 6.6 |
| - 1.977384 | - 1.764943 | - 1.553641 | - 1.343494 | - 1.134518 | - 0.926730 | - 0.720144 | 6.4 |
| - 2.379298 | - 2.165424 | - 1.952704 | - 1.741159 | - 1.530802 | - 1.321651 | - 1.113722 | 6.2 |
| - 2.776658 | - 2.561284 | - 2.347081 | - 2.134067 | - 1.922260 | - 1.711679 | - 1.502341 | 6.0 |
| - 3.169404 | - 2.952459 | - 2.736699 | - 2.522146 | - 2.308818 | - 2.096733 | - 1.885914 | 5.8 |
| - 3.557480 | - 3.338887 | - 3.121495 | - 2.905325 | - 2.690398 | - 2.476733 | - 2.264353 | 5.6 |
| - 3.940829 | - 3.720507 | - 3.501402 | - 3.283533 | - 3.066925 | - 2.851598 | - 2.637174 | 5.4 |
| - 4.319400 | - 4.097264 | - 3.876358 | - 3.656704 | - 3.438327 | - 3.221248 | - 3.005493 | 5.2 |
| - 4.693142 | - 4.469102 | - 4.246303 | - 4.024772 | - 3.804532 | - 3.585608 | - 3.368026 | 5.0 |
| - 5.062013 | - 4.835972 | - 4.611185 | - 4.387677 | - 4.165474 | - 3.944603 | - 3.725092 | 4.8 |
| - 5.425973 | - 5.197829 | - 4.970949 | - 4.745360 | - 4.521088 | - 4.298163 | - 4.076613 | 4.6 |
| - 5.784989 | - 5.554637 | - 5.325554 | - 5.097771 | - 4.871317 | - 4.646223 | - 4.422518 | 4.4 |
| - 6.139039 | - 5.906363 | - 5.674961 | - 5.444867 | - 5.216111 | - 4.988724 | - 4.762739 | 4.2 |
| - 6.488108 | - 6.252987 | - 6.019145 | - 5.786612 | - 5.555425 | - 5.325615 | - 5.097218 | 4.0 |
| - 6.832190 | - 6.594498 | - 6.358085 | - 6.122982 | - 5.889228 | - 5.656856 | - 5.425905 | 3.8 |
| - 7.171296 | - 6.930900 | - 6.691778 | - 6.453966 | - 6.217500 | - 5.982418 | - 5.748760 | 3.6 |
| - 7.505447 | - 7.262209 | - 7.020236 | - 6.779565 | - 6.540236 | - 6.302288 | - 6.065762 | 3.4 |
| - 7.834686 | - 7.588459 | - 7.343485 | - 7.099801 | - 6.857448 | - 6.616469 | - 6.376906 | 3.2 |
| - 8.159071 | - 7.909706 | - 7.661573 | - 7.414714 | - 7.169170 | - 6.924986 | - 6.682206 | 3.0 |
| - 8.478683 | - 8.226023 | - 7.974571 | - 7.724368 | - 7.475459 | - 7.227887 | - 6.981701 | 2.8 |
| - 8.793626 | - 8.537512 | - 8.282574 | - 8.028854 | - 7.776397 | - 7.525249 | - 7.275460 | 2.6 |
| - 9.104033 | - 8.844302 | - 8.585708 | - 8.328292 | - 8.072100 | - 7.817182 | - 7.563585 | 2.4 |
| - 9.410063 | - 9.146551 | - 8.884128 | - 8.622836 | - 8.362721 | - 8.103830 | - 7.846216 | 2.2 |
| - 9.711908 | - 9.444453 | - 9.178028 | - 8.912677 | - 8.648445 | - 8.385379 | - 8.123532 | 2.0 |
| - 9.861329 | - 9.591843 | - 9.323354 | - 9.055905 | - 8.789542 | - 8.524311 | - 8.260266 | 1.9 |
| -10.009792 | - 9.738235 | - 9.467641 | - 9.198050 | - 8.929506 | - 8.662059 | - 8.395761 | 1.8 |
| -10.157328 | - 9.883664 | - 9.610924 | - 9.339147 | - 9.068375 | - 8.798658 | - 8.530050 | 1.7 |
| -10.303973 | -10.028170 | - 9.753248 | - 9.479240 | - 9.206189 | - 8.934148 | - 8.663173 | 1.6 |
| -10.449767 | -10.171796 | - 9.894657 | - 9.618377 | - 9.342996 | - 9.068572 | - 8.795168 | 1.5 |
| -10.594747 | -10.314593 | -10.035210 | - 9.756616 | - 9.478850 | - 9.201975 | - 8.926073 | 1.4 |
| -10.738957 | -10.456620 | -10.174979 | - 9.894031 | - 9.613814 | - 9.334407 | - 9.055920 | 1.3 |
| -10.882442 | -10.597956 | -10.314063 | -10.030722 | - 9.747971 | - 9.465921 | - 9.184735 | 1.2 |
| -11.025247 | -10.738708 | -10.452607 | -10.166838 | - 9.881435 | - 9.596572 | - 9.312513 | 1.1 |
| -11.167421 | -10.879037 | -10.590845 | -10.302614 | -10.014375 | - 9.726418 | - 9.439205 | 1.0 |
| -11.309015 | -11.019203 | -10.729153 | -10.438446 | -10.147060 | - 9.855523 | - 9.564663 | 0.9 |
| -11.450081 | -11.159644 | -10.868259 | -10.575032 | -10.279953 | - 9.983950 | - 9.688559 | 0.8 |
| -11.590673 | -11.301125 | -11.009352 | -10.713636 | -10.413867 | -10.111768 | - 9.810199 | 0.7 |
| -11.730846 | -11.444988 | -11.154674 | -10.856605 | -10.550372 | -10.239046 | - 9.928189 | 0.6 |
| -11.870658 | -11.593564 | -11.308249 | -11.008367 | -10.692426 | -10.365858 | -10.039683 | 0.5 |
| -12.010168 | -11.750703 | -11.477203 | -11.178347 | -10.846193 | -10.492277 | -10.138677 | 0.4 |
| -12.149435 | -11.922132 | -11.673458 | -11.380539 | -11.025559 | -10.618380 | -10.211442 | 0.3 |
| -12.288514 | -12.114538 | -11.914238 | -11.650031 | -11.266813 | -10.744244 | -10.221833 | 0.2 |
| -12.427470 | -12.331465 | -12.215045 | -12.038687 | -11.685434 | -10.869949 | -10.054534 | 0.1 |
| -12.566371 | -12.566371 | -12.566371 | -12.566371 | -12.566371 | | - 9.424778 | 0.0 |

$v = \operatorname{arc} \Gamma(x+iy) = \Im\mathfrak{m} \ln \Gamma(z)$

$\longrightarrow x$

| $y$ ↓ | −2.8 | −2.7 | −2.6 | −2.5 | −2.4 | −2.3 | −2.2 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 10.0 | 7.310958 | 7.499482 | 7.687100 | 7.873804 | 8.059591 | 8.244455 | 8.428390 |
| 9.8 | 6.841978 | 7.031103 | 7.219306 | 7.406579 | 7.592920 | 7.778322 | 7.962[illegible] |
| 9.6 | 6.376667 | 6.566414 | 6.755223 | 6.943088 | 7.130004 | 7.315965 | 7.500966 |
| 9.4 | 5.915083 | 6.105476 | 6.294916 | 6.483396 | 6.670909 | 6.857451 | 7.043015 |
| 9.2 | 5.457290 | 5.648355 | 5.838449 | 6.027568 | 6.215702 | 6.402848 | 6.588998 |
| 9.0 | 5.003352 | 5.195114 | 5.385889 | 5.575671 | 5.764452 | 5.952226 | 6.138987 |
| 8.8 | 4.553332 | 4.745821 | 4.937305 | 5.127777 | 5.317231 | 5.505659 | 5.693055 |
| 8.6 | 4.107301 | 4.300544 | 4.492766 | 4.683958 | 4.874113 | 5.063223 | 5.251282 |
| 8.4 | 3.665325 | 3.859356 | 4.052347 | 4.244288 | 4.435174 | 4.624996 | 4.813745 |
| 8.2 | 3.227477 | 3.422328 | 3.616120 | 3.808844 | 4.000493 | 4.191056 | 4.380527 |
| 8.0 | 2.793829 | 2.989535 | 3.184164 | 3.377705 | 3.570150 | 3.761489 | 3.951713 |
| 7.8 | 2.364456 | 2.561055 | 2.756558 | 2.950952 | 3.144229 | 3.336378 | 3.527392 |
| 7.6 | 1.939434 | 2.136968 | 2.333383 | 2.528669 | 2.722816 | 2.915813 | 3.107653 |
| 7.4 | 1.518844 | 1.717353 | 1.914723 | 2.110943 | 2.306001 | 2.499888 | 2.692591 |
| 7.2 | 1.102764 | 1.302294 | 1.500664 | 1.697861 | 1.893875 | 2.088693 | 2.282303 |
| 7.0 | 0.691277 | 0.891876 | 1.091295 | 1.289517 | 1.486533 | 1.682327 | 1.876890 |
| 6.8 | + 0.284467 | 0.486188 | 0.686704 | 0.886002 | 1.084070 | 1.280891 | 1.476455 |
| 6.6 | - 0.117580 | + 0.085317 | + 0.286987 | 0.487415 | 0.686588 | 0.884488 | 1.081105 |
| 6.4 | - 0.514777 | - 0.310645 | - 0.107763 | + 0.093853 | + 0.294187 | 0.493225 | 0.690950 |
| 6.2 | - 0.907035 | - 0.701604 | - 0.497448 | - 0.294582 | - 0.093024 | + 0.107212 | + 0.306104 |
| 6.0 | - 1.294265 | - 1.087469 | - 0.881970 | - 0.677787 | - 0.474939 | - 0.273441 | - 0.073313 |
| 5.8 | - 1.676376 | - 1.468142 | - 1.261229 | - 1.055657 | - 0.851447 | - 0.648616 | - 0.447184 |
| 5.6 | - 2.053277 | - 1.843526 | - 1.635122 | - 1.428084 | - 1.222435 | - 1.018195 | - 0.815382 |
| 5.4 | - 2.424876 | - 2.213527 | - 2.003547 | - 1.794960 | - 1.587789 | - 1.382056 | - 1.177782 |
| 5.2 | - 2.791084 | - 2.578045 | - 2.366401 | - 2.156176 | - 1.947393 | - 1.740078 | - 1.534253 |
| 5.0 | - 3.151809 | - 2.936985 | - 2.723581 | - 2.511620 | - 2.301129 | - 2.092134 | - 1.884663 |
| 4.8 | - 3.506966 | - 3.290254 | - 3.074983 | - 2.861182 | - 2.648878 | - 2.438101 | - 2.228878 |
| 4.6 | - 3.856470 | - 3.637756 | - 3.420509 | - 3.204755 | - 2.990525 | - 2.777850 | - 2.566761 |
| 4.4 | - 4.200235 | - 3.979404 | - 3.760059 | - 3.542230 | - 3.325952 | - 3.111257 | - 2.898178 |
| 4.2 | - 4.538191 | - 4.315113 | - 4.093540 | - 3.873505 | - 3.655045 | - 3.438196 | - 3.222994 |
| 4.0 | - 4.870269 | - 4.644806 | - 4.420864 | - 4.198481 | - 3.977696 | - 3.758548 | - 3.541075 |
| 3.8 | - 5.196410 | - 4.968413 | - 4.741952 | - 4.517069 | - 4.293802 | - 4.072197 | - 3.852293 |
| 3.6 | - 5.516566 | - 5.285877 | - 5.056735 | - 4.829185 | - 4.603269 | - 4.379035 | - 4.156527 |
| 3.4 | - 5.830703 | - 5.597153 | - 5.365156 | - 5.134761 | - 4.906014 | - 4.678965 | - 4.453664 |
| 3.2 | - 6.138805 | - 5.902213 | - 5.667176 | - 5.433745 | - 5.201971 | - 5.971907 | - 4.743606 |
| 3.0 | - 6.440878 | - 6.201051 | - 5.962775 | - 5.726105 | - 5.491092 | - 5.257796 | - 5.026273 |
| 2.8 | - 6.736950 | - 6.493686 | - 6.251960 | - 6.011831 | - 5.773355 | - 5.536592 | - 5.301606 |
| 2.6 | - 7.027081 | - 6.780165 | - 6.534767 | - 6.290947 | - 6.048766 | - 5.808287 | - 5.569578 |
| 2.4 | - 7.311364 | - 7.060572 | - 6.811269 | - 6.563514 | - 6.317373 | - 6.072911 | - 5.830201 |
| 2.2 | - 7.589930 | - 7.335032 | - 7.081578 | - 6.829634 | - 6.579264 | - 6.330538 | - 6.083530 |
| 2.0 | - 7.862957 | - 7.603713 | - 7.345860 | - 7.089461 | - 6.834584 | - 6.581300 | - 6.329684 |
| 1.9 | - 7.997461 | - 7.735954 | - 7.475806 | - 7.217080 | - 6.959842 | - 6.704165 | - 6.450124 |
| 1.8 | - 8.130667 | - 7.866837 | - 7.604331 | - 7.343210 | - 7.083541 | - 6.825395 | - 6.568846 |
| 1.7 | - 8.262610 | - 7.996397 | - 7.731469 | - 7.467889 | - 7.205719 | - 6.945027 | - 6.685888 |
| 1.6 | - 8.393327 | - 8.124670 | - 7.857262 | - 7.591159 | - 7.326420 | - 7.063108 | - 6.801295 |
| 1.5 | - 8.522853 | - 8.251695 | - 7.981748 | - 7.713066 | - 7.445695 | - 7.179692 | - 6.915121 |
| 1.4 | - 8.651225 | - 8.377505 | - 8.104971 | - 7.833661 | - 7.563607 | - 7.294846 | - 7.027433 |
| 1.3 | - 8.778464 | - 8.502128 | - 8.226967 | - 7.953001 | - 7.680229 | - 7.408657 | - 7.138321 |
| 1.2 | - 8.904577 | - 8.625570 | - 8.347765 | - 8.071146 | - 7.795656 | - 7.521241 | - 7.247900 |
| 1.1 | - 9.029526 | - 8.747796 | - 8.467370 | - 8.188165 | - 7.910017 | - 7.632765 | - 7.356341 |
| 1.0 | - 9.153196 | - 8.868693 | - 8.585740 | - 8.304128 | - 8.023496 | - 7.743487 | - 7.463906 |
| 0.9 | - 9.275313 | - 8.987995 | - 8.702741 | - 8.419112 | - 8.136381 | - 7.853813 | - 7.571021 |
| 0.8 | - 9.395312 | - 9.105147 | - 8.818068 | - 8.533200 | - 8.249142 | - 7.964503 | - 7.678418 |
| 0.7 | - 9.511961 | - 9.219056 | - 8.931095 | - 8.646476 | - 8.362577 | - 8.076783 | - 7.787401 |
| 0.6 | - 9.623359 | - 9.327637 | - 9.040622 | - 8.759032 | - 8.478068 | - 8.192935 | - 7.900360 |
| 0.5 | - 9.724921 | - 9.427011 | - 9.144469 | - 8.870962 | - 8.597984 | - 8.317028 | - 8.021771 |
| 0.4 | - 9.808374 | - 9.510206 | - 9.238941 | - 8.982367 | - 8.726220 | - 8.456234 | - 8.160209 |
| 0.3 | - 9.857176 | - 9.565455 | - 9.318467 | - 9.093348 | - 8.868547 | - 8.622525 | - 8.332423 |
| 0.2 | - 9.839097 | - 9.575691 | - 9.376519 | - 9.204002 | - 9.031702 | - 8.833177 | - 8.570857 |
| 0.1 | - 9.701531 | - 9.525575 | - 9.409720 | - 9.314441 | - 9.219275 | - 9.103746 | - 8.928334 |
| 0.0 | - 9.424778 | - 9.424778 | - 9.424778 | - 9.424778 | - 9.424778 | - 9.424778 | - 9.424778 |

$$v = \operatorname{arc} \Gamma(x+iy) = \Im\mathrm{m} \ln \Gamma(z)$$

$\longrightarrow x$

| −2.1 | −2.0 | −1.9 | −1.8 | −1.7 | −1.6 | −1.5 | $y$ ↑ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 8.611394 | 8.793460 | 8.974584 | 9.154762 | 9.333990 | 9.512264 | 9.689579 | 10.0 |
| 8.146289 | 8.328844 | 8.510441 | 8.691074 | 8.870740 | 9.049433 | 9.227150 | 9.8 |
| 7.685000 | 7.868064 | 8.050151 | 8.231257 | 8.411378 | 8.590507 | 8.768643 | 9.6 |
| 7.227595 | 7.411188 | 7.593785 | 7.775383 | 7.955977 | 8.135561 | 8.314133 | 9.4 |
| 6.774147 | 6.958288 | 7.141417 | 7.323528 | 7.504614 | 7.684672 | 7.863696 | 9.2 |
| 6.324727 | 6.509441 | 6.693124 | 6.875767 | 7.057367 | 7.237918 | 7.417416 | 9.0 |
| 5.879412 | 6.064723 | 6.248983 | 6.432181 | 6.614317 | 6.795382 | 6.975372 | 8.8 |
| 5.438281 | 5.624214 | 5.809074 | 5.992855 | 6.175549 | 6.357152 | 6.537656 | 8.6 |
| 5.001414 | 5.187997 | 5.373485 | 5.557872 | 5.741150 | 5.923314 | 6.104355 | 8.4 |
| 4.568897 | 4.756158 | 4.942303 | 5.127323 | 5.311212 | 5.493962 | 5.675567 | 8.2 |
| 4.140815 | 4.328786 | 4.515617 | 4.701300 | 4.885828 | 5.069192 | 5.251386 | 8.0 |
| 3.717260 | 3.905972 | 4.093522 | 4.279899 | 4.465096 | 4.649104 | 4.831916 | 7.8 |
| 3.298323 | 3.487814 | 3.676115 | 3.863221 | 4.049120 | 4.233803 | 4.417263 | 7.6 |
| 2.884102 | 3.074408 | 3.263500 | 3.451369 | 3.638005 | 3.823397 | 4.007538 | 7.4 |
| 2.474696 | 2.665858 | 2.855780 | 3.044451 | 3.231861 | 3.417999 | 3.602856 | 7.2 |
| 2.070209 | 2.262271 | 2.453065 | 2.642579 | 2.830804 | 3.017727 | 3.203337 | 7.0 |
| 1.670747 | 1.863756 | 2.055467 | 2.245870 | 2.434953 | 2.622702 | 2.809108 | 6.8 |
| 1.276422 | 1.470427 | 1.663106 | 1.854445 | 2.044432 | 2.233054 | 2.420299 | 6.6 |
| 0.887348 | 1.082403 | 1.276102 | 1.468430 | 1.659372 | 1.848916 | 2.037048 | 6.4 |
| 0.503642 | 0.699807 | 0.894584 | 1.087956 | 1.279909 | 1.470427 | 1.659498 | 6.2 |
| + 0.125428 | + 0.322765 | 0.518681 | 0.713158 | 0.906182 | 1.097734 | 1.287800 | 6.0 |
| − 0.247169 | − 0.048592 | + 0.148530 | + 0.344180 | 0.538338 | 0.730987 | 0.922110 | 5.8 |
| − 0.614020 | − 0.414127 | − 0.215726 | − 0.018833 | + 0.176530 | 0.370345 | 0.562592 | 5.6 |
| − 0.974991 | − 0.773703 | − 0.573541 | − 0.375727 | − 0.179083 | + 0.015973 | + 0.209418 | 5.4 |
| − 1.329944 | − 1.127174 | − 0.925967 | − 0.726346 | − 0.528335 | − 0.331957 | − 0.137235 | 5.2 |
| − 1.678740 | − 1.474392 | − 1.271646 | − 1.070525 | − 0.871056 | − 0.673266 | − 0.477176 | 5.0 |
| − 2.021237 | − 1.815207 | − 1.610818 | − 1.408095 | − 1.207068 | − 1.007764 | − 0.810211 | 4.8 |
| − 2.357289 | − 2.149465 | − 1.943319 | − 1.738885 | − 1.536186 | − 1.335261 | − 1.136136 | 4.6 |
| − 2.686751 | − 2.477007 | − 2.268983 | − 2.062709 | − 1.858222 | − 1.655554 | − 1.454738 | 4.4 |
| − 3.009476 | − 2.797678 | − 2.587637 | − 2.379392 | − 2.172979 | − 1.968436 | − 1.765798 | 4.2 |
| − 3.325318 | − 3.111317 | − 2.899113 | − 2.688747 | − 2.480260 | − 2.273693 | − 2.069086 | 4.0 |
| − 3.634137 | − 3.417770 | − 3.203239 | − 2.990587 | − 2.779861 | − 2.571106 | − 2.364367 | 3.8 |
| − 3.935794 | − 3.716883 | − 3.499844 | − 3.284726 | − 3.071580 | − 2.860454 | − 2.651401 | 3.6 |
| − 4.230163 | − 4.008512 | − 3.788767 | − 3.570982 | − 3.355212 | − 3.141513 | − 2.929942 | 3.4 |
| − 4.517126 | − 4.292521 | − 4.069852 | − 3.849179 | − 3.630562 | − 3.414063 | − 3.199746 | 3.2 |
| − 4.796584 | − 4.568791 | − 4.342959 | − 4.119153 | − 3.897440 | − 3.677888 | − 3.460570 | 3.0 |
| − 5.068461 | − 4.837223 | − 4.607964 | − 4.380756 | − 4.155671 | − 3.932786 | − 3.712180 | 2.8 |
| − 5.332707 | − 5.097748 | − 4.864774 | − 4.633866 | − 4.405104 | − 4.178573 | − 3.954358 | 2.6 |
| − 5.589314 | − 5.350330 | − 5.113329 | − 4.878397 | − 4.645622 | − 4.415095 | − 4.186914 | 2.4 |
| − 5.838319 | − 5.594986 | − 5.353619 | − 5.114307 | − 4.877148 | − 4.642243 | − 4.409696 | 2.2 |
| − 6.079819 | − 5.831789 | − 5.585688 | − 5.341614 | − 5.099669 | − 4.859963 | − 4.622610 | 2.0 |
| − 6.197803 | − 5.947288 | − 5.698676 | − 5.452067 | − 5.207569 | − 4.965293 | − 4.725357 | 1.9 |
| − 6.313980 | − 6.060885 | − 5.809662 | − 5.560412 | − 5.313247 | − 5.068283 | − 4.825640 | 1.8 |
| − 6.428386 | − 6.172614 | − 5.918674 | − 5.666673 | − 5.416726 | − 5.168951 | − 4.923473 | 1.7 |
| − 6.541064 | − 6.282513 | − 6.025747 | − 5.770881 | − 5.518033 | − 5.267324 | − 5.018879 | 1.6 |
| − 6.652065 | − 6.390627 | − 6.130921 | − 5.873070 | − 5.617201 | − 5.363434 | − 5.111892 | 1.5 |
| − 6.761451 | − 6.497009 | − 6.234240 | − 5.973280 | − 5.714265 | − 5.457319 | − 5.202556 | 1.4 |
| − 6.869300 | − 6.601723 | − 6.335746 | − 6.071542 | − 5.809259 | − 5.549022 | − 5.290927 | 1.3 |
| − 6.975712 | − 6.704835 | − 6.435483 | − 6.167876 | − 5.902201 | − 5.638580 | − 5.377074 | 1.2 |
| − 7.080821 | − 6.806424 | − 6.533465 | − 6.262267 | − 5.993079 | − 5.726018 | − 5.461079 | 1.1 |
| − 7.184824 | − 6.906576 | − 6.629672 | − 6.354627 | − 6.081806 | − 5.811321 | − 5.543042 | 1.0 |
| − 7.288022 | − 7.005387 | − 6.723991 | − 6.444719 | − 6.168152 | − 5.894393 | − 5.623075 | 0.9 |
| − 7.390914 | − 7.102960 | − 6.816134 | − 6.532019 | − 6.251609 | − 5.974975 | − 5.701310 | 0.8 |
| − 7.494357 | − 7.199407 | − 6.905455 | − 6.615348 | − 6.331137 | − 6.052497 | − 5.777892 | 0.7 |
| − 7.599964 | − 7.294849 | − 6.990614 | − 6.692860 | − 6.404713 | − 6.125828 | − 5.852984 | 0.6 |
| − 7.710746 | − 7.389414 | − 7.068825 | − 6.760037 | − 6.468529 | − 6.192865 | − 5.926765 | 0.5 |
| − 7.832924 | − 7.483236 | − 7.134151 | − 6.808678 | − 6.515692 | − 6.249997 | − 5.999430 | 0.4 |
| − 7.980440 | − 7.576456 | − 7.172931 | − 6.822319 | − 6.534519 | − 6.291751 | − 6.071184 | 0.3 |
| − 8.189647 | − 7.669220 | − 7.149096 | − 6.768812 | − 6.508038 | − 6.311698 | − 6.142240 | 0.2 |
| − 8.576099 | − 7.761678 | − 6.947410 | − 6.595638 | − 6.421003 | − 6.306570 | − 6.212827 | 0.1 |
| − 9.424778 | | − 6.283185 | − 6.283185 | − 6.283185 | − 6.283185 | − 6.283185 | 0.0 |

$v = \operatorname{arc} \Gamma(x+iy) = \Im\mathrm{m} \ln \Gamma(z)$

$\longrightarrow x$

| $y$ \ $x$ | −1.4 | −1.3 | −1.2 | −1.1 | −1.0 | −0.9 | −0.8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 10.0 | 9.865932 | 10.041320 | 10.215737 | 10.389182 | 10.561652 | 10.733143 | 10.903652 |
| 9.8 | 9.403887 | 9.579641 | 9.754405 | 9.928179 | 10.100958 | 10.272739 | 10.443519 |
| 9.6 | 8.945779 | 9.121913 | 9.297039 | 9.471154 | 9.644255 | 9.816339 | 9.987401 |
| 9.4 | 8.491684 | 8.668213 | 8.843716 | 9.018186 | 9.191624 | 9.364022 | 9.535379 |
| 9.2 | 8.041681 | 8.218623 | 8.394517 | 8.569359 | 8.743145 | 8.915872 | 9.087535 |
| 9.0 | 7.595551 | 7.773223 | 7.949526 | 8.124755 | 8.298906 | 8.471976 | 8.643959 |
| 8.8 | 7.154279 | 7.332100 | 7.508830 | 7.684464 | 7.858996 | 8.032423 | 8.204740 |
| 8.6 | 6.717056 | 6.895346 | 7.072521 | 7.248577 | 7.423507 | 7.597308 | 7.769975 |
| 8.4 | 6.284270 | 6.463051 | 6.640693 | 6.817189 | 6.992537 | 7.166729 | 7.339761 |
| 8.2 | 5.856020 | 6.035314 | 6.213443 | 6.390403 | 6.566186 | 6.740788 | 6.914204 |
| 8.0 | 5.432403 | 5.612235 | 5.790876 | 5.968320 | 6.144561 | 6.319593 | 6.493411 |
| 7.8 | 5.013524 | 5.193920 | 5.373098 | 5.551051 | 5.727771 | 5.903255 | 6.077495 |
| 7.6 | 4.599491 | 4.780480 | 4.960221 | 5.138708 | 5.315934 | 5.491850 | 5.666574 |
| 7.4 | 4.190418 | 4.372029 | 4.552363 | 4.731412 | 4.909168 | 5.085624 | 5.260775 |
| 7.2 | 3.786422 | 3.968688 | 4.149646 | 4.329286 | 4.507601 | 4.684584 | 4.860226 |
| 7.0 | 3.387627 | 3.570582 | 3.752197 | 3.932462 | 4.111367 | 4.288904 | 4.465066 |
| 6.8 | 2.994158 | 3.177843 | 3.360152 | 3.541075 | 3.720603 | 3.898727 | 4.075438 |
| 6.6 | 2.606155 | 2.790609 | 2.973651 | 3.155271 | 3.335458 | 3.514202 | 3.691493 |
| 6.4 | 2.223754 | 2.409023 | 2.592842 | 2.775200 | 2.956084 | 3.135486 | 3.313394 |
| 6.2 | 1.847106 | 2.033239 | 2.217880 | 2.401020 | 2.582645 | 2.762745 | 2.941307 |
| 6.0 | 1.476364 | 1.663412 | 1.848928 | 2.032899 | 2.215312 | 2.396154 | 2.575411 |
| 5.8 | 1.111690 | 1.299711 | 1.486158 | 1.671013 | 1.854264 | 2.035896 | 2.215896 |
| 5.6 | 0.753253 | 0.942310 | 1.129748 | 1.315547 | 1.499693 | 1.682169 | 1.862962 |
| 5.4 | 0.401231 | 0.591395 | 0.779890 | 0.966697 | 1.151799 | 1.335179 | 1.516819 |
| 5.2 | - 0.055811 | + 0.247157 | 0.436784 | 0.624670 | 0.810796 | 0.995143 | 1.177695 |
| 5.0 | - 0.282813 | - 0.090200 | + 0.100640 | + 0.289684 | 0.476910 | 0.662298 | 0.845827 |
| 4.8 | - 0.614435 | - 0.420462 | - 0.228319 | - 0.038030 | + 0.150380 | 0.336888 | 0.521472 |
| 4.6 | - 0.938841 | - 0.743406 | - 0.549859 | - 0.358229 | - 0.165841 | + 0.019177 | + 0.204900 |
| 4.4 | - 1.255809 | - 1.058797 | - 0.863734 | - 0.670653 | - 0.479584 | - 0.290555 | - 0.103594 |
| 4.2 | - 1.565103 | - 1.366386 | - 1.169684 | - 0.975032 | - 0.782462 | - 0.592009 | - 0.403704 |
| 4.0 | - 1.866480 | - 1.665918 | - 1.467435 | - 1.271075 | - 1.076873 | - 0.884869 | - 0.695097 |
| 3.8 | - 2.159690 | - 1.957120 | - 1.756701 | - 1.558479 | - 1.362496 | - 1.168795 | - 0.977417 |
| 3.6 | - 2.444470 | - 2.239714 | - 2.037181 | - 1.836923 | - 1.638989 | - 1.443426 | - 1.250282 |
| 3.4 | - 2.720555 | - 2.513410 | - 2.308563 | - 2.106072 | - 1.905992 | - 1.708378 | - 1.513287 |
| 3.2 | - 2.987674 | - 2.777911 | - 2.570523 | - 2.365573 | - 2.163126 | - 1.963245 | - 1.765993 |
| 3.0 | - 3.245555 | - 3.032917 | - 2.822727 | - 2.615062 | - 2.409992 | - 2.207593 | - 2.007937 |
| 2.8 | - 3.493932 | - 3.278125 | - 3.064840 | - 2.854164 | - 2.646178 | - 2.440970 | - 2.238622 |
| 2.6 | - 3.732550 | - 3.513241 | - 3.296525 | - 3.082497 | - 2.871256 | - 2.662899 | - 2.457525 |
| 2.4 | - 3.961178 | - 3.737990 | - 3.517457 | - 3.299688 | - 3.084796 | - 2.872894 | - 2.664100 |
| 2.2 | - 4.179618 | - 3.952125 | - 3.727336 | - 3.505376 | - 3.286375 | - 3.070465 | - 2.857781 |
| 2.0 | - 4.387730 | - 4.155450 | - 3.925906 | - 3.699239 | - 3.475594 | - 3.255129 | - 3.038002 |
| 1.9 | - 4.487888 | - 4.253019 | - 4.020889 | - 3.791650 | - 3.565458 | - 3.342481 | - 3.122893 |
| 1.8 | - 4.585449 | - 4.347848 | - 4.112982 | - 3.881013 | - 3.652108 | - 3.426447 | - 3.204217 |
| 1.7 | - 4.680423 | - 4.439942 | - 4.202184 | - 3.967315 | - 3.735515 | - 3.506981 | - 3.281914 |
| 1.6 | - 4.772830 | - 4.529317 | - 4.288498 | - 4.050548 | - 3.815661 | - 3.584047 | - 3.355930 |
| 1.5 | - 4.862702 | - 4.616001 | - 4.371947 | - 4.130722 | - 3.892535 | - 3.657618 | - 3.426216 |
| 1.4 | - 4.950089 | - 4.700042 | - 4.452570 | - 4.207861 | - 3.966143 | - 3.727674 | - 3.492730 |
| 1.3 | - 5.035059 | - 4.781516 | - 4.530436 | - 4.282015 | - 4.036505 | - 3.794204 | - 3.555434 |
| 1.2 | - 5.117711 | - 4.860536 | - 4.605654 | - 4.353265 | - 4.103662 | - 3.857206 | - 3.614286 |
| 1.1 | - 5.198186 | - 4.937278 | - 4.678396 | - 4.421742 | - 4.167674 | - 3.916668 | - 3.669224 |
| 1.0 | - 5.276694 | - 5.012022 | - 4.748941 | - 4.487651 | - 4.228631 | - 3.972557 | - 3.720133 |
| 0.9 | - 5.353559 | - 5.085221 | - 4.817747 | - 4.551321 | - 4.286648 | - 4.024772 | - 3.766774 |
| 0.8 | - 5.429300 | - 5.157647 | - 4.885596 | - 4.613300 | - 4.341874 | - 4.073063 | - 3.808650 |
| 0.7 | - 5.504779 | - 5.230631 | - 4.953861 | - 4.674524 | - 4.394489 | - 4.116852 | - 3.844746 |
| 0.6 | - 5.581454 | - 5.306524 | - 5.025020 | - 4.736671 | - 4.444713 | - 4.154900 | - 3.873017 |
| 0.5 | - 5.661787 | - 5.389496 | - 5.103655 | - 4.802897 | - 4.492800 | - 4.184556 | - 3.889391 |
| 0.4 | - 5.749776 | - 5.486832 | - 5.198470 | - 4.879552 | - 4.539038 | - 4.200054 | - 3.885754 |
| 0.3 | - 5.851309 | - 5.610635 | - 5.326358 | - 4.980744 | - 4.583753 | - 4.187940 | - 3.845875 |
| 0.2 | - 5.973250 | - 5.778323 | - 5.519924 | - 5.143006 | - 4.627296 | - 4.112381 | - 3.737876 |
| 0.1 | - 6.119325 | - 6.005604 | - 5.832165 | - 5.482090 | - 4.670043 | - 3.858400 | - 3.509544 |
| 0.0 | - 6.283185 | - 6.283185 | - 6.283185 | - 6.283185 | | - 3.141593 | - 3.141593 |

$v = \operatorname{arc} \Gamma(x+iy) = \Im\mathfrak{m} \ln \Gamma(z)$

$\longrightarrow x$

| −0.7 | −0.6 | −0.5 | −0.4 | −0.3 | −0.2 | −0.1 | $y$ ↑ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 11.073177 | 11.241716 | 11.409265 | 11.575825 | 11.741391 | 11.905962 | 12.069538 | 10.0 |
| 10.613296 | 10.782067 | 10.949829 | 11.116580 | 11.282320 | 11.447044 | 11.610752 | 9.8 |
| 10.157440 | 10.326452 | 10.494436 | 10.661388 | 10.827307 | 10.992190 | 11.156036 | 9.6 |
| 9.705690 | 9.874955 | 10.043169 | 10.210330 | 10.376436 | 10.541485 | 10.705474 | 9.4 |
| 9.258132 | 9.427659 | 9.596114 | 9.763492 | 9.929794 | 10.095016 | 10.259156 | 9.2 |
| 8.814853 | 8.984654 | 9.153360 | 9.320966 | 9.487472 | 9.652874 | 9.817171 | 9.0 |
| 8.375945 | 8.546032 | 8.715000 | 8.882845 | 9.049563 | 9.215155 | 9.379615 | 8.8 |
| 7.941504 | 8.111891 | 8.281133 | 8.449227 | 8.616169 | 8.781957 | 8.946589 | 8.6 |
| 7.511630 | 7.682332 | 7.851861 | 8.020216 | 8.187391 | 8.353386 | 8.518197 | 8.4 |
| 7.086429 | 7.257459 | 7.427289 | 7.595917 | 7.763338 | 7.929550 | 8.094549 | 8.2 |
| 6.666009 | 6.837384 | 7.007531 | 7.176445 | 7.344123 | 7.510562 | 7.675759 | 8.0 |
| 6.250485 | 6.422222 | 6.592701 | 6.761917 | 6.929865 | 7.096544 | 7.261949 | 7.8 |
| 5.839978 | 6.012096 | 6.182924 | 6.352456 | 6.520689 | 6.687619 | 6.853243 | 7.6 |
| 5.434613 | 5.607132 | 5.778327 | 5.948194 | 6.116727 | 6.283922 | 6.449776 | 7.4 |
| 5.034522 | 5.207465 | 5.379048 | 5.549267 | 5.718115 | 5.885591 | 6.051688 | 7.2 |
| 4.639845 | 4.813234 | 4.985227 | 5.155819 | 5.325001 | 5.492772 | 5.659126 | 7.0 |
| 4.250728 | 4.424589 | 4.597015 | 4.768000 | 4.937537 | 5.105621 | 5.272247 | 6.8 |
| 3.867324 | 4.041686 | 4.214572 | 4.385974 | 4.555885 | 4.724301 | 4.891216 | 6.6 |
| 3.489798 | 3.664691 | 3.838064 | 4.009908 | 4.180218 | 4.348987 | 4.516208 | 6.4 |
| 3.118322 | 3.293778 | 3.467669 | 3.639984 | 3.810719 | 3.979861 | 4.147409 | 6.2 |
| 2.753075 | 2.929133 | 3.103575 | 3.276392 | 3.447577 | 3.617120 | 3.785015 | 6.0 |
| 2.394252 | 2.570951 | 2.745982 | 2.919335 | 3.091001 | 3.260971 | 3.429238 | 5.8 |
| 2.042057 | 2.219441 | 2.395102 | 2.569028 | 2.741209 | 2.911638 | 3.080303 | 5.6 |
| 1.696706 | 1.874824 | 2.051161 | 2.225702 | 2.398437 | 2.569356 | 2.738448 | 5.4 |
| 1.358431 | 1.537338 | 1.714400 | 1.889602 | 2.062932 | 2.234379 | 2.403932 | 5.2 |
| 1.027479 | 1.207234 | 1.385078 | 1.560993 | 1.734965 | 1.906982 | 2.077031 | 5.0 |
| 0.704110 | 0.884783 | 1.063470 | 1.240156 | 1.414823 | 1.587456 | 1.758043 | 4.8 |
| 0.388608 | 0.570272 | 0.749875 | 0.927396 | 1.102816 | 1.276119 | 1.447290 | 4.6 |
| + 0.081271 | + 0.264013 | 0.444611 | 0.623040 | 0.799281 | 0.973314 | 1.145122 | 4.4 |
| - 0.217578 | - 0.033660 | + 0.148023 | 0.327444 | 0.504582 | 0.679412 | 0.851916 | 4.2 |
| - 0.507593 | - 0.322390 | - 0.139519 | + 0.040991 | + 0.219111 | 0.394818 | 0.568088 | 4.0 |
| - 0.788401 | - 0.601787 | - 0.417610 | - 0.235903 | - 0.056699 | + 0.119974 | 0.294089 | 3.8 |
| - 1.059604 | - 0.871433 | - 0.685813 | - 0.502782 | - 0.322378 | - 0.144634 | + 0.030419 | 3.6 |
| - 1.320768 | - 1.130875 | - 0.943654 | - 0.759152 | - 0.577412 | - 0.398474 | - 0.222374 | 3.4 |
| - 1.571432 | - 1.379619 | - 1.190613 | - 1.004467 | - 0.821232 | - 0.640956 | - 0.463681 | 3.2 |
| - 1.811094 | - 1.617135 | - 1.426126 | - 1.238132 | - 1.053212 | - 0.871425 | - 0.692820 | 3.0 |
| - 2.039219 | - 1.842844 | - 1.649574 | - 1.459488 | - 1.272658 | - 1.089152 | - 0.909034 | 2.8 |
| - 2.255234 | - 2.056122 | - 1.860284 | - 1.667813 | - 1.478797 | - 1.293321 | - 1.111460 | 2.6 |
| - 2.458528 | - 2.256296 | - 2.057518 | - 1.862307 | - 1.670771 | - 1.483013 | - 1.299129 | 2.4 |
| - 2.648463 | - 2.442650 | - 2.240481 | - 2.042093 | - 1.847621 | - 1.657193 | - 1.470932 | 2.2 |
| - 2.824379 | - 2.614426 | - 2.408312 | - 2.206207 | - 2.008279 | - 1.814690 | - 1.625599 | 2.0 |
| - 2.906873 | - 2.694603 | - 2.486272 | - 2.282065 | - 2.082172 | - 1.886776 | - 1.696058 | 1.9 |
| - 2.985616 | - 2.770844 | - 2.560105 | - 2.353610 | - 2.151567 | - 1.954184 | - 1.761668 | 1.8 |
| - 3.060531 | - 2.843050 | - 2.629697 | - 2.420703 | - 2.216299 | - 2.016725 | - 1.822214 | 1.7 |
| - 3.131544 | - 2.911129 | - 2.694932 | - 2.483203 | - 2.276204 | - 2.074201 | - 1.877464 | 1.6 |
| - 3.198587 | - 2.974993 | - 2.755698 | - 2.540977 | - 2.331114 | - 2.126409 | - 1.927177 | 1.5 |
| - 3.261597 | - 3.034557 | - 2.811893 | - 2.593894 | - 2.380868 | - 2.173147 | - 1.971096 | 1.4 |
| - 3.320513 | - 3.089746 | - 2.863425 | - 2.641844 | - 2.425321 | - 2.214220 | - 2.008962 | 1.3 |
| - 3.375272 | - 3.140489 | - 2.910222 | - 2.684745 | - 2.464363 | - 2.249460 | - 2.040522 | 1.2 |
| - 3.425791 | - 3.186713 | - 2.952235 | - 2.722563 | - 2.497942 | - 2.278751 | - 2.065547 | 1.1 |
| - 3.471937 | - 3.228328 | - 2.989452 | - 2.755351 | - 2.526125 | - 2.302087 | - 2.083873 | 1.0 |
| - 3.513459 | - 3.265190 | - 3.021902 | - 2.783304 | - 2.549173 | - 2.319655 | - 2.095458 | 0.9 |
| - 3.549859 | - 3.297030 | - 3.049675 | - 2.806853 | - 2.567709 | - 2.332006 | - 2.100504 | 0.8 |
| - 3.580151 | - 3.323315 | - 3.072926 | - 2.826834 | - 2.582979 | - 2.340343 | - 2.099661 | 0.7 |
| - 3.602413 | - 3.343006 | - 3.091898 | - 2.844753 | - 2.597339 | - 2.347075 | - 2.094425 | 0.6 |
| - 3.612988 | - 3.354157 | - 3.106923 | - 2.863218 | - 2.615077 | - 2.356854 | - 2.087931 | 0.5 |
| - 3.605190 | - 3.353383 | - 3.118440 | - 2.886483 | - 2.643738 | - 2.378628 | - 2.086731 | 0.4 |
| - 3.567599 | - 3.335506 | - 3.126987 | - 2.920810 | - 2.695841 | - 2.429744 | - 2.105404 | 0.3 |
| - 3.483554 | - 3.294460 | - 3.133198 | - 2.973555 | - 2.789380 | - 2.543480 | - 2.181267 | 0.2 |
| - 3.338166 | - 3.227396 | - 3.137803 | - 3.049040 | - 2.940784 | - 2.773714 | - 2.431157 | 0.1 |
| - 3.141593 | - 3.141593 | - 3.141593 | - 3.141593 | - 3.141593 | - 3.141593 | - 3.141593 | 0.0 |

$$v = \text{arc}\,\Gamma(x+iy) = \Im\text{m}\ln\Gamma(z)$$

$\longrightarrow x$

| y ↑ | 0.0 | 0.1 | 0.2 | 0.3 | 0.4 | 0.5 | 0.6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 10.0 | 12.232117 | 12.393697 | 12.554278 | 12.713859 | 12.872440 | 13.030020 | 13.186600 |
| 9.8 | 11.773443 | 11.935115 | 12.095768 | 12.255400 | 12.414011 | 12.571601 | 12.728171 |
| 9.6 | 11.318844 | 11.480612 | 11.641339 | 11.801024 | 11.959668 | 12.117269 | 12.273827 |
| 9.4 | 10.868405 | 11.030272 | 11.191077 | 11.350818 | 11.509494 | 11.667107 | 11.823654 |
| 9.2 | 10.422212 | 10.5[illegible]4184 | 10.745070 | 10.904869 | 11.063580 | 11.221205 | 11.377740 |
| 9.0 | 9.980360 | 10.142441 | 10.303411 | 10.463270 | 10.622018 | 10.779655 | 10.936178 |
| 8.8 | 9.542943 | 9.705138 | 9.866196 | 10.026119 | 10.184905 | 10.342554 | 10.499064 |
| 8.6 | 9.110062 | 9.272376 | 9.433527 | 9.593517 | 9.752342 | 9.910004 | 10.066502 |
| 8.4 | 8.681823 | 8.844261 | 9.005509 | 9.165568 | 9.324436 | 9.482110 | 9.638595 |
| 8.2 | 8.258334 | 8.420903 | 8.582254 | 8.742385 | 8.901296 | 9.058986 | 9.215455 |
| 8.0 | 7.839712 | 8.002418 | 8.163876 | 8.324083 | 8.483040 | 8.640746 | 8.797200 |
| 7.8 | 7.426077 | 7.588928 | 7.750498 | 7.910786 | 8.069791 | 8.227512 | 8.383950 |
| 7.6 | 7.017557 | 7.180559 | 7.342248 | 7.502620 | 7.661676 | 7.819415 | 7.975835 |
| 7.4 | 6.614286 | 6.777448 | 6.939261 | 7.099723 | 7.258832 | 7.416589 | 7.572992 |
| 7.2 | 6.216404 | 6.379735 | 6.541680 | 6.702236 | 6.861402 | 7.019177 | 7.175561 |
| 7.0 | 5.824060 | 5.987570 | 6.149654 | 6.310310 | 6.469537 | 6.627331 | 6.783696 |
| 6.8 | 5.437412 | 5.601111 | 5.763343 | 5.924104 | 6.083393 | 6.241209 | 6.397552 |
| 6.6 | 5.056626 | 5.220526 | 5.382914 | 5.543786 | 5.703143 | 5.860981 | 6.017303 |
| 6.4 | 4.681878 | 4.845991 | 5.008545 | 5.169537 | 5.328964 | 5.486827 | 5.643124 |
| 6.2 | 4.313355 | 4.477696 | 4.640426 | 4.801545 | 4.961048 | 5.118936 | 5.275208 |
| 6.0 | 3.951257 | 4.115840 | 4.278759 | 4.440013 | 4.599598 | 4.757513 | 4.913757 |
| 5.8 | 3.595796 | 3.760637 | 3.923759 | 4.085157 | 4.244829 | 4.402773 | 4.558988 |
| 5.6 | 3.247198 | 3.412317 | 3.575655 | 3.737208 | 3.896973 | 4.054948 | 4.211132 |
| 5.4 | 2.905706 | 3.071124 | 3.234694 | 3.396413 | 3.556278 | 3.714287 | 3.870437 |
| 5.2 | 2.571581 | 2.737319 | 2.901140 | 3.063039 | 3.223011 | 3.381055 | 3.537170 |
| 5.0 | 2.245102 | 2.411187 | 2.575279 | 2.737371 | 2.997460 | 3.055543 | 3.211619 |
| 4.8 | 1.926572 | 2.093032 | 2.257417 | 2.419719 | 2.579934 | 2.738059 | 2.894093 |
| 4.6 | 1.616316 | 1.783185 | 1.947887 | 2.110419 | 2.270771 | 2.428942 | 2.584930 |
| 4.4 | 1.314689 | 1.482004 | 1.647056 | 1.809836 | 1.970337 | 2.128559 | 2.284497 |
| 4.2 | 1.022077 | 1.189881 | 1.355314 | 1.518367 | 1.679033 | 1.837309 | 1.993192 |
| 4.0 | 0.738902 | 0.907242 | 1.073095 | 1.236449 | 1.397296 | 1.555633 | 1.711456 |
| 3.8 | 0.465624 | 0.634558 | 0.800876 | 0.964563 | 1.125611 | 1.284014 | 1.439770 |
| 3.6 | + 0.202755 | 0.372349 | 0.539183 | 0.703241 | 0.864512 | 1.022989 | 1.178671 |
| 3.4 | - 0.049144 | + 0.121189 | 0.288600 | 0.453073 | 0.614594 | 0.773155 | 0.928753 |
| 3.2 | - 0.289445 | - 0.118281 | + 0.049782 | + 0.214722 | 0.376525 | 0.535180 | 0.690684 |
| 3.0 | - 0.517446 | - 0.345340 | - 0.176538 | - 0.011066 | + 0.151057 | 0.309819 | 0.465216 |
| 2.8 | - 0.732357 | - 0.559175 | - 0.389526 | - 0.223444 | - 0.060954 | + 0.097931 | 0.253205 |
| 2.6 | - 0.933285 | - 0.758858 | - 0.588230 | - 0.421442 | - 0.258526 | - 0.099499 | + 0.055633 |
| 2.4 | - 1.119208 | - 0.943327 | - 0.771553 | - 0.603938 | - 0.440521 | - 0.281327 | - 0.126362 |
| 2.2 | - 1.288951 | - 1.111350 | - 0.938213 | - 0.769614 | - 0.605602 | - 0.446208 | - 0.291443 |
| 2.0 | - 1.441150 | - 1.261479 | - 1.086700 | - 0.916908 | - 0.752173 | - 0.592537 | - 0.438015 |
| 1.9 | - 1.510184 | - 1.329311 | - 1.153574 | - 0.983086 | - 0.817928 | - 0.658151 | - 0.503773 |
| 1.8 | - 1.574213 | - 1.392003 | - 1.215197 | - 1.043928 | - 0.878297 | - 0.718362 | - 0.564145 |
| 1.7 | - 1.632995 | - 1.449285 | - 1.271276 | - 1.099128 | - 0.932961 | - 0.772849 | - 0.618815 |
| 1.6 | - 1.686265 | - 1.500861 | - 1.321486 | - 1.148337 | - 0.981562 | - 0.821250 | - 0.667428 |
| 1.5 | - 1.733736 | - 1.546402 | - 1.365462 | - 1.191164 | - 1.023690 | - 0.863151 | - 0.709578 |
| 1.4 | - 1.775097 | - 1.585540 | - 1.402788 | - 1.227153 | - 1.058869 | - 0.898072 | - 0.744798 |
| 1.3 | - 1.810013 | - 1.617863 | - 1.432983 | - 1.255775 | - 1.086542 | - 0.925455 | - 0.772549 |
| 1.2 | - 1.838127 | - 1.642909 | - 1.455487 | - 1.276401 | - 1.106045 | - 0.944634 | - 0.792198 |
| 1.1 | - 1.859063 | - 1.660142 | - 1.469631 | - 1.288265 | - 1.116569 | - 0.954812 | - 0.802995 |
| 1.0 | - 1.872437 | - 1.668946 | - 1.474596 | - 1.290415 | - 1.117112 | - 0.955008 | - 0.804048 |
| 0.9 | - 1.877871 | - 1.668578 | - 1.469335 | - 1.281620 | - 1.106391 | - 0.944007 | - 0.794283 |
| 0.8 | - 1.875022 | - 1.658113 | - 1.452456 | - 1.260233 | - 1.082732 | - 0.920279 | - 0.772409 |
| 0.7 | - 1.863623 | - 1.636303 | - 1.421983 | - 1.223957 | - 1.043892 | - 0.881881 | - 0.736891 |
| 0.6 | - 1.843540 | - 1.601310 | - 1.374926 | - 1.169447 | - 0.986811 | - 0.826363 | - 0.685954 |
| 0.5 | - 1.814855 | - 1.550062 | - 1.306398 | - 1.091645 | - 0.907302 | - 0.750728 | - 0.617681 |
| 0.4 | - 1.777952 | - 1.476686 | - 1.207809 | - 0.982744 | - 0.799793 | - 0.651588 | - 0.[illegible]30288 |
| 0.3 | - 1.733617 | - 1.368098 | - 1.063053 | - 0.830898 | - 0.657561 | - 0.525814 | - 0.4227[illegible]8 |
| 0.2 | - 1.683099 | - 1.189457 | - 0.841262 | - 0.620261 | - 0.474618 | - 0.372112 | - 0.295610 |
| 0.1 | 1.628119 | - 0.827465 | - 0.492306 | - 0.338470 | - 0.250952 | - 0.193606 | - 0.152426 |
| 0.0 | | 0.000000 | 0.000000 | 0.000000 | 0.000000 | 0.000000 | 0.000000 |

$v = \operatorname{arc} \Gamma(x+iy) = \Im\mathrm{m} \ln \Gamma(z)$

$\longrightarrow x$

| 0.7 | 0.8 | 0.9 | 1.0 | 1.1 | 1.2 | 1.3 | $\uparrow y$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 13.342178 | 13.496756 | 13.650334 | 13.802913 | 13.954494 | 14.105077 | 14.254598 | 10.0 |
| 12.883719 | 13.038246 | 13.191752 | 13.344239 | 13.495708 | 13.646159 | 13.795577 | 9.8 |
| 12.429343 | 12.583317 | 12.737249 | 12.889640 | 13.040992 | 13.191305 | 13.340581 | 9.6 |
| 11.979136 | 12.133555 | 12.286909 | 12.439201 | 12.590430 | 12.740600 | 12.889711 | 9.4 |
| 11.533188 | 11.687548 | 11.840821 | 11.993009 | 12.144111 | 12.294131 | 12.443068 | 9.2 |
| 11.091589 | 11.245889 | 11.399078 | 11.551156 | 11.702127 | 11.851989 | 12.000746 | 9.0 |
| 10.654438 | 10.808674 | 10.961775 | 11.113740 | 11.264571 | 11.414270 | [illegible] | 8.8 |
| 10.221835 | 10.376005 | 10.529013 | 10.680859 | 10.831545 | 10.981072 | [illegible] | 8.6 |
| 9.793887 | 9.947987 | 10.100898 | 10.252619 | 10.403153 | 10.552501 | [illegible] | 8.4 |
| 9.370703 | 9.524731 | 9.677540 | 9.829131 | 9.979505 | 10.128665 | 10.276612 | 8.2 |
| 8.952402 | 9.106353 | 9.259055 | 9.410508 | 9.560715 | 9.709677 | 9.857397 | 8.0 |
| 8.539104 | 8.692975 | 8.845565 | 8.996874 | 9.146905 | 9.295658 | 9.443139 | 7.8 |
| 8.130939 | 8.284726 | 8.437196 | 8.588354 | 8.738198 | 8.886734 | 9.033963 | 7.6 |
| 7.728041 | 7.881739 | 8.034085 | 8.185082 | 8.334732 | 8.483037 | 8.630001 | 7.4 |
| 7.330554 | 7.484158 | 7.636372 | 7.787200 | 7.936643 | 8.084706 | 8.231389 | 7.2 |
| 6.938628 | 7.092132 | 7.244207 | 7.394656 | 7.544082 | 7.691887 | [illegible] | 7.0 |
| 6.552422 | 6.705820 | 6.857748 | 7.008208 | 7.157203 | 7.304736 | 7.450811 | 6.8 |
| 6.172105 | 6.325391 | 6.477163 | 6.627422 | 6.776172 | 6.923416 | 7.069159 | 6.6 |
| 5.797855 | 5.951023 | 6.102628 | 6.252674 | 6.401164 | 6.548101 | 6.693492 | 6.4 |
| 5.429863 | 5.582904 | 5.734333 | 5.884151 | 6.032365 | 6.178909 | 6.323992 | 6.2 |
| 5.068331 | 5.221237 | 5.372477 | 5.522053 | 5.669971 | 5.816235 | 5.960851 | 6.0 |
| 4.713476 | 4.866237 | 5.017274 | 5.166592 | 5.314194 | 5.460086 | 5.604275 | 5.8 |
| 4.365526 | 4.518133 | 4.668954 | 4.817994 | 4.965258 | 5.110752 | 5.254484 | 5.6 |
| 4.024732 | 4.177172 | 4.327761 | 4.476503 | 4.623404 | 4.768470 | 4.911711 | 5.4 |
| 3.691357 | 3.843618 | 3.993956 | 4.142377 | 4.288887 | 4.433494 | 4.576207 | 5.2 |
| 3.365689 | 3.517757 | 3.667824 | 3.815899 | 3.961986 | 4.106095 | 4.248239 | 5.0 |
| 3.048038 | 3.199895 | 3.349669 | 3.497368 | 3.642998 | 3.786571 | 3.928097 | 4.8 |
| 2.738738 | 2.890367 | 3.039822 | 3.187112 | 3.332246 | 3.475234 | 3.616090 | 4.6 |
| 2.438154 | 2.589534 | 2.738641 | 2.885486 | 3.030077 | 3.172429 | 3.312556 | 4.4 |
| 2.146685 | 2.297791 | 2.446518 | 2.592874 | 2.736872 | 2.878527 | 3.017856 | 4.2 |
| 1.864768 | 2.015573 | 2.163879 | 2.309698 | 2.453043 | 2.593933 | 2.732385 | 4.0 |
| 1.592881 | 1.743354 | 1.891195 | 2.036421 | 2.179045 | 2.319089 | 2.456575 | 3.8 |
| 1.331559 | 1.481661 | 1.628986 | 1.773551 | 1.915375 | 2.054481 | 2.190896 | 3.6 |
| 1.081392 | 1.231078 | 1.377826 | 1.521652 | 1.662582 | 1.800641 | 1.935862 | 3.4 |
| 0.843041 | 0.992259 | 1.138356 | 1.281352 | 1.421276 | 1.558159 | 1.692042 | 3.2 |
| 0.617253 | 0.765940 | 0.911297 | 1.053351 | 1.192135 | 1.327690 | 1.460062 | 3.0 |
| 0.404874 | 0.552952 | 0.697462 | 0.838439 | 0.975922 | 1.109963 | 1.240616 | 2.8 |
| 0.206876 | 0.354248 | 0.497779 | 0.637511 | 0.773496 | 0.905794 | 1.034477 | 2.6 |
| + 0.024380 | 0.170925 | 0.313310 | 0.451588 | 0.585827 | 0.716102 | 0.842503 | 2.4 |
| - 0.141296 | + 0.004264 | + 0.145287 | 0.281846 | 0.414024 | 0.541923 | 0.665655 | 2.2 |
| - 0.288592 | - 0.144225 | - 0.004844 | 0.129646 | 0.259359 | 0.384428 | 0.504999 | 2.0 |
| - 0.354774 | - 0.211103 | - 0.072678 | + 0.060613 | 0.181902 | 0.312345 | 0.431108 | 1.9 |
| - 0.415622 | - 0.272730 | - 0.135373 | - 0.003417 | 0.123295 | 0.244942 | 0.361719 | 1.8 |
| - 0.470831 | - 0.328820 | - 0.192661 | - 0.062199 | 0.062756 | 0.182412 | 0.296997 | 1.7 |
| - 0.520060 | - 0.379049 | - 0.244249 | - 0.115469 | + 0.007517 | 0.124955 | 0.237111 | 1.6 |
| - 0.562922 | - 0.423061 | - 0.289812 | - 0.162940 | - 0.042173 | 0.072782 | 0.182237 | 1.5 |
| - 0.598978 | - 0.460454 | - 0.328992 | - 0.204301 | - 0.086051 | + 0.026112 | 0.132550 | 1.4 |
| - 0.627726 | - 0.490775 | - 0.361393 | - 0.239217 | - 0.123839 | - 0.014836 | 0.088223 | 1.3 |
| - 0.648587 | - 0.513515 | - 0.386584 | - 0.267331 | - 0.155253 | - 0.049839 | 0.049417 | 1.2 |
| - 0.660894 | - 0.528101 | - 0.404091 | - 0.288267 | - 0.180006 | - 0.078689 | + 0.016279 | 1.1 |
| - 0.663871 | - 0.533895 | - 0.413408 | - 0.301640 | - 0.197818 | - 0.101195 | - 0.011075 | 1.0 |
| - 0.656626 | - 0.530190 | - 0.414004 | - 0.307074 | - 0.208439 | - 0.117208 | - 0.032574 | 0.9 |
| - 0.638142 | - 0.516231 | - 0.405353 | - 0.304226 | - 0.211672 | - 0.126638 | - 0.048207 | 0.8 |
| - 0.607291 | - 0.491247 | - 0.386968 | - 0.292826 | - 0.207404 | - 0.129487 | - 0.058053 | 0.7 |
| - 0.562895 | - 0.454528 | - 0.358480 | - 0.272744 | - 0.195662 | - 0.125880 | - 0.062298 | 0.6 |
| - 0.503861 | - 0.405551 | - 0.319739 | - 0.244058 | - 0.176661 | - 0.116108 | - 0.061268 | 0.5 |
| - 0.429441 | - 0.344184 | - 0.270956 | - 0.207156 | - 0.150868 | - 0.100661 | - 0.055448 | 0.4 |
| - 0.339647 | - 0.270945 | - 0.212857 | - 0.162821 | - 0.119052 | - 0.080259 | - 0.045500 | 0.3 |
| - 0.235790 | - 0.187286 | - 0.146823 | - 0.112302 | - 0.082309 | - 0.055864 | - 0.032258 | 0.2 |
| - 0.120942 | - 0.095769 | - 0.074963 | - 0.057323 | - 0.042067 | - 0.028658 | - 0.016720 | 0.1 |
| 0.000000 | 0.000000 | 0.000000 | 0.000000 | 0.000000 | 0.000000 | 0.000000 | 0.0 |

$$v = \operatorname{arc} \Gamma(x+iy) = \Im\mathrm{m} \ln \Gamma(z)$$

$\longrightarrow x$

| $y \uparrow$ | 1.4 | 1.5 | 1.6 | 1.7 | 1.8 | 1.9 | 2.0 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 10.0 | 14.403258 | 14.550858 | 14.697468 | 14.843088 | 14.987722 | 15.131372 | 15.274041 |
| 9.8 | 13.944014 | 14.091422 | 14.237819 | 14.383208 | 14.527590 | 14.670969 | 14.813347 |
| 9.6 | 13.488821 | 13.636029 | 13.782204 | 13.927352 | 14.071472 | 14.214569 | 14.356644 |
| 9.4 | 13.037763 | 13.184762 | 13.330707 | 13.475602 | 13.519449 | 13.762252 | 13.904013 |
| 9.2 | 12.590926 | 12.737707 | 12.883411 | 13.028043 | 13.171606 | 13.314102 | 13.455534 |
| 9.0 | 12.148399 | 12.294953 | 12.440406 | 12.584764 | 12.728029 | 12.870205 | 13.011295 |
| 8.8 | 11.710278 | 11.856593 | 12.001784 | 12.145856 | 12.288811 | 12.430653 | 12.571385 |
| 8.6 | 11.276661 | 11.422726 | 11.567643 | 11.711415 | 11.854045 | 11.995538 | 12.135896 |
| 8.4 | 10.847649 | 10.993453 | 11.138084 | 11.281542 | 11.423832 | 11.564959 | 11.704926 |
| 8.2 | 10.423351 | 10.568882 | 10.713211 | 10.856340 | 10.998275 | 11.139018 | 11.278575 |
| 8.0 | 10.003878 | 10.149123 | 10.293136 | 10.435920 | 10.577481 | 10.717823 | 10.856950 |
| 7.8 | 9.589350 | 9.734294 | 9.877974 | 10.020397 | 10.161565 | 10.301484 | 10.440161 |
| 7.6 | 9.179889 | 9.324516 | 9.467848 | 9.609889 | 9.750645 | 9.890120 | 10.028323 |
| 7.4 | 8.775627 | 8.919920 | 9.062884 | 9.204524 | 9.344845 | 9.483854 | 9.621557 |
| 7.2 | 8.376700 | 8.520640 | 8.663217 | 8.804433 | 8.944297 | 9.082814 | 9.219990 |
| 7.0 | 7.983251 | 8.126819 | 8.268987 | 8.409756 | 8.549136 | 8.687134 | 8.823756 |
| 6.8 | 7.595433 | 7.738608 | 7.880341 | 8.020639 | 8.159508 | 8.296957 | 8.432992 |
| 6.6 | 7.213407 | 7.356165 | 7.497439 | 7.637236 | 7.775564 | 7.912431 | 7.295034 |
| 6.4 | 6.837342 | 6.979657 | 7.120443 | 7.259710 | 7.397464 | 7.533715 | 7.668473 |
| 6.2 | 6.467418 | 6.609262 | 6.749530 | 6.888232 | 7.025377 | 7.160974 | 7.295034 |
| 6.0 | 6.103826 | 6.245168 | 6.384885 | 6.522986 | 6.659482 | 6.794383 | 6.927701 |
| 5.8 | 5.746769 | 5.887575 | 6.026702 | 6.164163 | 6.299967 | 6.434126 | 6.566653 |
| 5.6 | 5.396461 | 5.536694 | 5.675192 | 5.811968 | 5.947032 | 6.080399 | 6.212082 |
| 5.4 | 5.053135 | 5.192753 | 5.330576 | 5.466617 | 5.600890 | 5.733408 | 5.864188 |
| 5.2 | 4.717035 | 4.855993 | 4.993090 | 5.128342 | 5.261765 | 5.393374 | 5.523185 |
| 5.0 | 4.388426 | 4.526670 | 4.662986 | 4.797390 | 4.929898 | 5.060528 | 5.189299 |
| 4.8 | 4.067589 | 4.205063 | 4.340535 | 4.474022 | 4.605543 | 4.735118 | 4.862769 |
| 4.6 | 3.754829 | 3.891468 | 4.026024 | 4.158519 | 4.288972 | 4.417407 | 4.543848 |
| 4.4 | 3.450474 | 3.586204 | 3.719765 | 3.851182 | 3.980476 | 4.107675 | 4.232805 |
| 4.2 | 3.154878 | 3.289615 | 3.422091 | 3.552333 | 3.680366 | 3.806225 | 3.929927 |
| 4.0 | 2.868424 | 3.002074 | 3.133362 | 3.262318 | 3.388974 | 3.513361 | 3.635516 |
| 3.8 | 2.591530 | 2.723983 | 2.853965 | 2.981510 | 3.106654 | 3.229434 | 3.349893 |
| 3.6 | 2.324651 | 2.455780 | 2.584319 | 2.710308 | 2.833788 | 2.954804 | 3.073400 |
| 3.4 | 2.068282 | 2.197939 | 2.324877 | 2.449143 | 2.570784 | 2.689851 | 2.806397 |
| 3.2 | 1.822966 | 1.950980 | 2.076133 | 2.198479 | 2.318077 | 2.434985 | 2.549263 |
| 3.0 | 1.589302 | 1.715467 | 1.838617 | 1.958817 | 2.076134 | 2.190636 | 2.302397 |
| 2.8 | 1.367945 | 1.492019 | 1.612908 | 1.730692 | 1.845449 | 1.957260 | 2.066211 |
| 2.6 | 1.159621 | 1.281309 | 1.399630 | 1.514677 | 1.626545 | 1.735331 | 1.841133 |
| 2.4 | 0.965126 | 1.084074 | 1.199456 | 1.311383 | 1.419970 | 1.525335 | 1.627593 |
| 2.2 | 0.785341 | 0.901112 | 1.013101 | 1.121447 | 1.226289 | 1.327765 | 1.426014 |
| 2.0 | 0.621228 | 0.733281 | 0.841324 | 0.945529 | 1.046065 | 1.143098 | 1.236795 |
| 1.9 | 0.545372 | 0.655321 | 0.761145 | 0.863052 | 0.961171 | 1.055744 | 1.146931 |
| 1.8 | 0.473831 | 0.581487 | 0.684901 | 0.784283 | 0.879842 | 0.971776 | 1.060281 |
| 1.7 | 0.406744 | 0.511895 | 0.612688 | 0.709358 | 0.802134 | 0.891236 | 0.976874 |
| 1.6 | 0.344255 | 0.446661 | 0.544597 | 0.638326 | 0.728099 | 0.814158 | 0.896728 |
| 1.5 | 0.286504 | 0.385895 | 0.480712 | 0.571247 | 0.657778 | 0.740565 | 0.819854 |
| 1.4 | 0.233628 | 0.329700 | 0.421106 | 0.508171 | 0.591196 | 0.670467 | 0.746246 |
| 1.3 | 0.185756 | 0.278168 | 0.365840 | 0.449129 | 0.528367 | 0.603858 | 0.675884 |
| 1.2 | 0.143001 | 0.231371 | 0.314951 | 0.394134 | 0.469279 | 0.540711 | 0.608727 |
| 1.1 | 0.105456 | 0.189357 | 0.268454 | 0.343173 | 0.413899 | 0.480976 | 0.544715 |
| 1.0 | 0.073178 | 0.152141 | 0.226328 | 0.296199 | 0.362160 | 0.424573 | 0.483758 |
| 0.9 | 0.046181 | 0.119691 | 0.188510 | 0.253127 | 0.313964 | 0.371394 | 0.425741 |
| 0.8 | 0.024416 | 0.091918 | 0.154886 | 0.213824 | 0.269167 | 0.321290 | 0.370515 |
| 0.7 | + 0.007758 | 0.068666 | 0.125279 | 0.178107 | 0.227583 | 0.274076 | 0.317900 |
| 0.6 | - 0.004018 | 0.049695 | 0.099444 | 0.145731 | 0.188974 | 0.229523 | 0.267676 |
| 0.5 | - 0.011247 | 0.034670 | 0.077058 | 0.116388 | 0.153048 | 0.187359 | 0.219589 |
| 0.4 | - 0.014395 | 0.023153 | 0.057715 | 0.089705 | 0.119464 | 0.147269 | 0.173351 |
| 0.3 | - 0.014060 | 0.014606 | 0.040929 | 0.065245 | 0.087826 | 0.108894 | 0.128636 |
| 0.2 | - 0.010971 | 0.008394 | 0.026141 | 0.042510 | 0.057693 | 0.071846 | 0.085093 |
| 0.1 | - 0.005973 | 0.003790 | 0.012722 | 0.020955 | 0.028586 | 0.035695 | 0.042346 |
| 0.0 | 0.000000 | 0.000000 | 0.000000 | 0.000000 | 0.000000 | 0.000000 | 0.000000 |

$v = \operatorname{arc} \Gamma(x+iy) = \Im\mathrm{m} \ln \Gamma(z)$

$\longrightarrow x$

| 2.1 | 2.2 | 2.3 | 2.4 | 2.5 | 2.6 | 2.7 | y ↑ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 15.415731 | 15.556445 | 15.696119 | 15.834958 | 15.972764 | 16.109609 | 16.245494 | 10.0 |
| 14.954727 | 15.095113 | 15.234490 | 15.372913 | 15.510335 | 15.646778 | 15.782244 | 9.8 |
| 14.497703 | 14.637746 | 14.776779 | 14.914805 | 15.051828 | 15.187852 | 15.322882 | 9.6 |
| 14.044735 | 14.184423 | 14.323081 | 14.460710 | 14.597318 | 14.732906 | 14.867481 | 9.4 |
| 13.595907 | 13.735224 | 13.873490 | 14.010707 | 14.146881 | 14.282016 | 14.416118 | 9.2 |
| 13.151304 | 13.290234 | 13.428090 | 13.564877 | 13.700600 | 13.835262 | 13.968871 | 9.0 |
| 12.711013 | 12.849538 | 12.986967 | 13.123306 | 13.258557 | 13.392727 | 13.525821 | 8.8 |
| 12.275125 | 12.413229 | 12.550213 | 12.686082 | 12.820841 | 12.954496 | 13.087053 | 8.6 |
| 11.843738 | 11.981400 | 12.117918 | 12.253297 | 12.387541 | 12.520659 | 12.652654 | 8.4 |
| 11.416951 | 11.554151 | 11.690180 | 11.825046 | 11.958752 | 12.091307 | 12.222716 | 8.2 |
| 10.994868 | 11.131583 | 11.267102 | 11.401429 | 11.534572 | 11.666537 | 11.797331 | 8.0 |
| 10.577599 | 10.713805 | 10.848787 | 10.982550 | 11.115102 | 11.246449 | 11.376600 | 7.8 |
| 10.155256 | 10.300929 | 10.435347 | 10.568518 | 10.700448 | 10.831148 | 10.960624 | 7.6 |
| 9.757960 | 9.893071 | 10.026896 | 10.159444 | 10.290723 | 10.420742 | 10.549508 | 7.4 |
| 9.355834 | 9.490353 | 9.623555 | 9.755448 | 9.886041 | 10.015344 | 10.143365 | 7.2 |
| 8.959010 | 9.092905 | 9.225449 | 9.356652 | 9.486522 | 9.615072 | 9.742307 | 7.0 |
| 8.567623 | 8.700860 | 8.832710 | 8.963185 | 9.092293 | 9.220047 | 9:346456 | 6.8 |
| 8.181820 | 8.314359 | 8.445476 | 8.575180 | 8.703484 | 8.830399 | 8.955936 | 6.6 |
| 7.801748 | 7.933550 | 8.063890 | 8.192780 | 8.320234 | 8.446261 | 8.570876 | 6.4 |
| 7.427569 | 7.558588 | 7.688105 | 7.816132 | 7.942684 | 8.067772 | 8.191413 | 6.2 |
| 7.059448 | 7.189635 | 7.318278 | 7.445390 | 7.570985 | 7.695078 | 7.817686 | 6.0 |
| 6.697561 | 6.826865 | 6.954578 | 7.080716 | 7.205295 | 7.328331 | 7.449842 | 5.8 |
| 6.342095 | 6.470455 | 6.597178 | 6.722279 | 6.845777 | 6.967689 | 7.088034 | 5.6 |
| 5.993246 | 6.120598 | 6.246262 | 6.370257 | 6.492603 | 6.613317 | 6.732421 | 5.4 |
| 5.651218 | 5.777492 | 5.902024 | 6.024837 | 6.145951 | 6.265387 | 6.383169 | 5.2 |
| 5.316232 | 5.441348 | 5.564667 | 5.686214 | 5.806010 | 5.924079 | 6.040448 | 5.0 |
| 4.988518 | 5.112389 | 5.234405 | 5.354592 | 5.472975 | 5.589580 | 5.704436 | 4.8 |
| 4.668319 | 4.790848 | 4.911461 | 5.030185 | 5.147050 | 5.262084 | 5.375318 | 4.6 |
| 4.355895 | 4.476973 | 4.596070 | 4.713217 | 4.828447 | 4.941790 | 5.053282 | 4.4 |
| 4.051517 | 4.171023 | 4.288480 | 4.403923 | 4.517388 | 4.628909 | 4.738525 | 4.2 |
| 3.755474 | 3.873272 | 3.988949 | 4.102546 | 4.214100 | 4.323652 | 4.431244 | 4.0 |
| 3.468069 | 3.584007 | 3.697747 | 3.809336 | 3.918818 | 4.026239 | 4.131643 | 3.8 |
| 3.189625 | 3.303526 | 3.415153 | 3.524556 | 3.631785 | 3.736891 | 3.839924 | 3.6 |
| 2.920477 | 3.032144 | 3.141457 | 3.248471 | 3.353243 | 3.455831 | 3.556292 | 3.4 |
| 2.660976 | 2.770185 | 2.876956 | 2.981352 | 3.083439 | 3.183281 | 3.280942 | 3.2 |
| 2.411487 | 2.517980 | 2.621950 | 2.723471 | 2.822616 | 2.919456 | 3.014064 | 3.0 |
| 2.172385 | 2.275868 | 2.376742 | 2.475094 | 2.571006 | 2.664558 | 2.755833 | 2.8 |
| 1.944051 | 2.044183 | 2.141626 | 2.236476 | 2.328827 | 2.418772 | 2.506399 | 2.6 |
| 1.726861 | 1.823251 | 1.916877 | 2.007848 | 2.096271 | 2.182249 | 2.265882 | 2.4 |
| 1.521172 | 1.613373 | 1.702743 | 1.789408 | 1.873489 | 1.955101 | 2.034355 | 2.2 |
| 1.327312 | 1.414805 | 1.499420 | 1.581299 | 1.660576 | 1.737380 | 1.811831 | 2.0 |
| 1.234903 | 1.319825 | 1.401855 | 1.481142 | 1.557828 | 1.632048 | 1.703929 | 1.9 |
| 1.145542 | 1.227736 | 1.307031 | 1.383584 | 1.457545 | 1.529055 | 1.598245 | 1.8 |
| 1.059247 | 1.138545 | 1.214946 | 1.288616 | 1.359712 | 1.428380 | 1.494757 | 1.7 |
| 0.976026 | 1.052250 | 1.125591 | 1.196222 | 1.264306 | 1.329995 | 1.393430 | 1.6 |
| 0.895874 | 0.968838 | 1.038943 | 1.106371 | 1.171293 | 1.233863 | 1.294227 | 1.5 |
| 0.818776 | 0.888282 | 0.954968 | 1.019026 | 1.080629 | 1.139936 | 1.197095 | 1.4 |
| 0.744700 | 0.810541 | 0.873621 | 0.934134 | 0.992258 | 1.048156 | 1.101975 | 1.3 |
| 0.673596 | 0.735559 | 0.794837 | 0.851627 | 0.906112 | 0.958452 | 1.008797 | 1.2 |
| 0.605393 | 0.663259 | 0.718536 | 0.771425 | 0.822106 | 0.870742 | 0.917478 | 1.1 |
| 0.539997 | 0.593543 | 0.644620 | 0.693428 | 0.740144 | 0.784928 | 0.827923 | 1.0 |
| 0.477291 | 0.526293 | 0.572971 | 0.617519 | 0.660110 | 0.700900 | 0.740026 | 0.9 |
| 0.417125 | 0.461365 | 0.503448 | 0.543563 | 0.581876 | 0.618534 | 0.653667 | 0.8 |
| 0.359325 | 0.398588 | 0.435889 | 0.471405 | 0.505293 | 0.537689 | 0.568714 | 0.7 |
| 0.303685 | 0.337768 | 0.370110 | 0.400874 | 0.430201 | 0.458215 | 0.485024 | 0.6 |
| 0.249967 | 0.278683 | 0.305906 | 0.331777 | 0.356420 | 0.379942 | 0.402440 | 0.5 |
| 0.197903 | 0.221090 | 0.243051 | 0.263905 | 0.283755 | 0.302693 | 0.320796 | 0.4 |
| 0.147200 | 0.164719 | 0.181299 | 0.197033 | 0.212001 | 0.226277 | 0.239917 | 0.3 |
| 0.097545 | 0.109285 | 0.120391 | 0.130926 | 0.140946 | 0.150496 | 0.159619 | 0.2 |
| 0.048842 | 0.054483 | 0.060052 | 0.065334 | 0.070358 | 0.075141 | 0.079711 | 0.1 |
| 0.000000 | 0.000000 | 0.000000 | 0.000000 | 0.000000 | 0.000000 | 0.000000 | 0.0 |

$v = \arc \Gamma(x+iy) = \Im \mathrm{m} \ln \Gamma(z)$

$\longrightarrow x$

| $y$ ↓ | 2.8 | 2.9 | 3.0 | 3.1 | 3.2 | 3.3 | 3.4 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 10.0 | 16.380426 | 16.514407 | 16.647442 | 16.779535 | 16.910691 | 17.040847 | 17.170210 |
| 9.8 | 15.916737 | 16.050264 | 16.182826 | 16.314430 | 16.445080 | 16.574765 | 16.703540 |
| 9.6 | 15.456920 | 15.589973 | 15.722045 | 15.853141 | 15.983266 | 16.112425 | 16.240623 |
| 9.4 | 15.001047 | 15.133607 | 15.265169 | 15.395736 | 15.525315 | 15.653911 | 15.781528 |
| 9.2 | 14.549191 | 14.681239 | 14.812270 | 14.942287 | 15.071298 | 15.199307 | 15.326321 |
| 9.0 | 14.101430 | 14.232945 | 14.363423 | 14.492868 | 14.621287 | 14.748686 | 14.871071 |
| 8.8 | 13.657845 | 13.788804 | 13.918705 | 14.047554 | 14.175356 | 14.302119 | 14.427850 |
| 8.6 | 13.218518 | 13.348897 | 13.428196 | 13.606422 | 13.733582 | 13.859683 | 13.984732 |
| 8.4 | 12.783535 | 12.913308 | 13.041979 | 13.169556 | 13.296045 | 13.421455 | 13.545793 |
| 8.2 | 12.352986 | 12.482125 | 12.610140 | 12.737038 | 12.862827 | 12.987516 | 13.111111 |
| 8.0 | 11.926963 | 12.055439 | 12.182767 | 12.308956 | 12.434014 | 12.557948 | 12.680768 |
| 7.8 | 11.505562 | 11.633344 | 11.759954 | 11.885401 | 12.009692 | 12.132838 | 12.254847 |
| 7.6 | 11.088884 | 11.215938 | 11.341795 | 11.456463 | 11.589953 | 11.712273 | 11.833435 |
| 7.4 | 10.677032 | 10.803323 | 10.928390 | 11.052242 | 11.174892 | 11.296347 | 11.416620 |
| 7.2 | 10.270114 | 10.395603 | 10.519840 | 10.642836 | 10.764604 | 10.885152 | 11.004494 |
| 7.0 | 9.868243 | 9.992887 | 10.116252 | 10.238350 | 10.359190 | 10.478787 | 10.597151 |
| 6.8 | 9.471534 | 9.595290 | 9.717737 | 9.838888 | 9.958755 | 10.077351 | 10.194688 |
| 6.6 | 9.080108 | 9.202928 | 9.324409 | 9.444563 | 9.563405 | 9.680948 | 9.797206 |
| 6.4 | 8.694093 | 8.815924 | 8.936385 | 9.055488 | 9.173250 | 9.289684 | 9.404806 |
| 6.2 | 8.313619 | 8.434406 | 8.553789 | 8.671784 | 8.788404 | 8.903670 | 9.017595 |
| 6.0 | 7.938821 | 8.058503 | 8.176747 | 8.293569 | 8.408987 | 8.523018 | 8.635680 |
| 5.8 | 7.569843 | 7.688363 | 7.805390 | 7.920971 | 8.035117 | 8.147844 | 8.259172 |
| 5.6 | 7.206830 | 7.324097 | 7.439854 | 7.554121 | 7.666918 | 7.778265 | 7.888184 |
| 5.4 | 6.849936 | 6.965881 | 7.080279 | 7.193151 | 7.304518 | 7.414404 | 7.522829 |
| 5.2 | 6.499317 | 6.613856 | 6.726808 | 6.838197 | 6.948047 | 7.056382 | 7.163226 |
| 5.0 | 6.155138 | 6.268177 | 6.379589 | 6.489401 | 6.597637 | 6.704325 | 6.809490 |
| 4.8 | 5.817568 | 5.929005 | 6.038774 | 6.146904 | 6.253423 | 6.358359 | 6.461740 |
| 4.6 | 5.486781 | 5.596503 | 5.704517 | 5.810851 | 5.915539 | 6.018609 | 6.120094 |
| 4.4 | 5.162954 | 5.270840 | 5.376974 | 5.481390 | 5.584122 | 5.685203 | 5.784667 |
| 4.2 | 4.846271 | 4.952185 | 5.056304 | 5.158666 | 5.259306 | 5.358263 | 5.455573 |
| 4.0 | 4.536916 | 4.640709 | 4.742664 | 4.842823 | 4.941225 | 5.037911 | 5.132922 |
| 3.8 | 4.235076 | 4.336583 | 4.436212 | 4.534004 | 4.630007 | 4.724263 | 4.816816 |
| 3.6 | 3.940937 | 4.039978 | 4.137098 | 4.232347 | 4.325773 | 4.417425 | 4.507350 |
| 3.4 | 3.654681 | 3.751055 | 3.845470 | 3.937979 | 4.028636 | 4.117494 | 4.204604 |
| 3.2 | 3.376484 | 3.469970 | 3.561460 | 3.651016 | 3.738694 | 3.824553 | 3.908647 |
| 3.0 | 3.106510 | 3.196863 | 3.285190 | 3.371560 | 3.456028 | 3.538664 | 3.619526 |
| 2.8 | 2.844907 | 2.931858 | 3.016758 | 3.099680 | 3.180695 | 3.259868 | 3.337264 |
| 2.6 | 2.591797 | 2.675048 | 2.756234 | 2.835434 | 2.912722 | 2.988172 | 3.061853 |
| 2.4 | 2.347266 | 2.426493 | 2.503651 | 2.578827 | 2.652100 | 2.723549 | 2.793246 |
| 2.2 | 2.111356 | 2.186204 | 2.258996 | 2.329822 | 2.398771 | 2.465922 | 2.531356 |
| 2.0 | 1.884046 | 1.954132 | 2.022193 | 2.088325 | 2.152620 | 2.215163 | 2.276037 |
| 1.9 | 1.773590 | 1.841142 | 1.906694 | 1.970342 | 2.032182 | 2.092301 | 2.150781 |
| 1.8 | 1.665240 | 1.730154 | 1.793096 | 1.854168 | 1.913466 | 1.971077 | 2.027085 |
| 1.7 | 1.558969 | 1.621135 | 1.681368 | 1.739769 | 1.796434 | 1.851455 | 1.904913 |
| 1.6 | 1.454742 | 1.514050 | 1.571469 | 1.627102 | 1.681047 | 1.733393 | 1.784224 |
| 1.5 | 1.352516 | 1.408854 | 1.463355 | 1.516124 | 1.567257 | 1.616845 | 1.664971 |
| 1.4 | 1.252240 | 1.305494 | 1.356973 | 1.406779 | 1.455011 | 1.501757 | 1.547101 |
| 1.3 | 1.153852 | 1.203908 | 1.252259 | 1.299008 | 1.344249 | 1.388072 | 1.430557 |
| 1.2 | 1.057282 | 1.104028 | 1.149147 | 1.192742 | 1.234906 | 1.275724 | 1.315275 |
| 1.1 | 0.962448 | 1.005772 | 1.047558 | 1.087906 | 1.126906 | 1.164642 | 1.201187 |
| 1.0 | 0.869259 | 0.909051 | 0.947405 | 0.984416 | 1.020171 | 1.054748 | 1.088219 |
| 0.9 | 0.777612 | 0.813768 | 0.848595 | 0.882183 | 0.914612 | 0.945958 | 0.976289 |
| 0.8 | 0.687392 | 0.719812 | 0.751022 | 0.781104 | 0.810136 | 0.838185 | 0.865313 |
| 0.7 | 0.598474 | 0.627066 | 0.654574 | 0.681076 | 0.706640 | 0.731329 | 0.755200 |
| 0.6 | 0.510724 | 0.535402 | 0.559132 | 0.581984 | 0.604020 | 0.625292 | 0.645853 |
| 0.5 | 0.423995 | 0.444683 | 0.464568 | 0.483710 | 0.502160 | 0.519967 | 0.537172 |
| 0.4 | 0.338133 | 0.354765 | 0.370746 | 0.386124 | 0.400943 | 0.415241 | 0.429053 |
| 0.3 | 0.252974 | 0.265496 | 0.277526 | 0.289097 | 0.300247 | 0.311002 | 0.321388 |
| 0.2 | 0.168350 | 0.176723 | 0.184762 | 0.192497 | 0.199945 | 0.207129 | 0.214068 |
| 0.1 | 0.084085 | 0.088278 | 0.092304 | 0.096425 | 0.099906 | 0.103503 | 0.106977 |
| 0.0 | 0.000000 | 0.000000 | 0.000000 | 0.000000 | 0.000000 | 0.000000 | 0.000000 |

$v = \operatorname{arc} \Gamma(x+iy) = \Im\mathrm{m} \ln \Gamma(z)$

$\longrightarrow x$

| 3.5 | 3.6 | 3.7 | 3.8 | 3.9 | 4.0 | 4.1 | $y$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 17.298582 | 17.426037 | 17.552579 | 17.678213 | 17.802946 | 17.926781 | 18.049725 | 10.0 |
| 16.831357 | 16.958242 | 17.084200 | 17.209234 | 17.333352 | 17.456558 | 17.578859 | 9.8 |
| 16.367866 | 16.494160 | 16.619511 | 16.743923 | 16.867403 | 16.989957 | 17.111591 | 9.6 |
| 15.908174 | 16.033854 | 16.158573 | 16.282339 | 16.405157 | 16.527034 | 16.647977 | 9.4 |
| 15.452346 | 15.577387 | 15.701451 | 15.824546 | 15.946677 | 16.067852 | 16.188076 | 9.2 |
| 15.000450 | 15.124827 | 15.248210 | 15.370607 | 15.492025 | 15.612469 | 15.731947 | 9.0 |
| 14.552556 | 14.676242 | 14.798917 | 14.920588 | 15.041263 | 15.160948 | 15.277652 | 8.8 |
| 14.108736 | 14.231704 | 14.353641 | 14.474556 | 14.594458 | 14.713354 | 14.831251 | 8.6 |
| 13.669066 | 13.791284 | 13.912452 | 14.032581 | 14.151678 | 14.269751 | 14.386810 | 8.4 |
| 13.233622 | 13.355057 | 13.475424 | 13.594733 | 13.712991 | 13.830208 | 13.946394 | 8.2 |
| 12.802483 | 12.923101 | 13.042631 | 13.161085 | 13.278468 | 13.394793 | 13.510068 | 8.0 |
| 12.375730 | 12.495495 | 12.614152 | 12.731711 | 12.848183 | 12.963577 | 13.077903 | 7.8 |
| 11.953447 | 12.072320 | 12.190064 | 12.306690 | 12.422209 | 12.536630 | 12.639966 | 7.6 |
| 11.535721 | 11.653660 | 11.770449 | 11.886099 | 12.000622 | 12.114028 | 12.226330 | 7.4 |
| 11.122639 | 11.239601 | 11.355390 | 11.470019 | 11.583500 | 11.695845 | 11.807066 | 7.2 |
| 10.714295 | 10.830232 | 10.944973 | 11.058533 | 11.170923 | 11.282157 | 11.392248 | 7.0 |
| 10.310781 | 10.425642 | 10.539234 | 10.651723 | 10.762971 | 10.873041 | 10.981949 | 6.8 |
| 9.912193 | 10.025925 | 10.138414 | 10.249676 | 10.359726 | 10.468577 | 10.576247 | 6.6 |
| 9.518631 | 9.631175 | 9.742452 | 9.852479 | 9.961271 | 10.068845 | 10.175215 | 6.4 |
| 9.130196 | 9.241489 | 9.351492 | 9.460221 | 9.567692 | 9.673924 | 9.778932 | 6.2 |
| 8.746991 | 8.856967 | 8.965628 | 9.072991 | 9.179074 | 9.283895 | 9.387474 | 6.0 |
| 8.369121 | 8.477709 | 8.584955 | 8.690880 | 8.795502 | 8.898841 | 9.000916 | 5.8 |
| 7.996694 | 8.103815 | 8.209570 | 8.313979 | 8.417062 | 8.518841 | 8.619336 | 5.6 |
| 7.629818 | 7.735390 | 7.839570 | 7.942380 | 8.043841 | 8.143977 | 8.242809 | 5.4 |
| 7.268602 | 7.372536 | 7.475051 | 7.576172 | 7.675922 | 7.774326 | 7.871407 | 5.2 |
| 6.913158 | 7.015356 | 7.116111 | 7.215446 | 7.313390 | 7.409966 | 7.505202 | 5.0 |
| 6.563596 | 6.663954 | 6.762843 | 6.860290 | 6.956324 | 7.050971 | 7.144259 | 4.8 |
| 6.220023 | 6.318429 | 6.415340 | 6.510788 | 6.604802 | 6.697411 | 6.788645 | 4.6 |
| 5.882548 | 5.978879 | 6.073693 | 6.167021 | 6.258897 | 6.349352 | 6.438416 | 4.4 |
| 5.551273 | 5.645398 | 5.737983 | 5.829065 | 5.918676 | 6.006851 | 6.093624 | 4.2 |
| 5.226297 | 5.318073 | 5.408291 | 5.496986 | 5.584197 | 5.669960 | 5.754309 | 4.0 |
| 4.907709 | 4.996985 | 5.084683 | 5.170846 | 5.255510 | 5.338719 | 5.420506 | 3.8 |
| 4.595594 | 4.682202 | 4.767220 | 4.850690 | 4.932655 | 5.013156 | 5.092234 | 3.6 |
| 4.290017 | 4.373781 | 4.455944 | 4.536553 | 4.615652 | 4.693286 | 4.769498 | 3.4 |
| 3.991033 | 4.071761 | 4.150884 | 4.228450 | 4.304509 | 4.379105 | 4.452286 | 3.2 |
| 3.698674 | 3.776162 | 3.852046 | 3.926378 | 3.999209 | 4.070588 | 4.140562 | 3.0 |
| 3.412947 | 3.486977 | 3.559411 | 3.630306 | 3.699714 | 3.767687 | 3.834275 | 2.8 |
| 3.133831 | 3.204170 | 3.272932 | 3.340175 | 3.405954 | 3.470325 | 3.533337 | 2.6 |
| 2.861264 | 2.927669 | 2.992524 | 3.055892 | 3.117830 | 3.178392 | 3.237633 | 2.4 |
| 2.595144 | 2.657358 | 2.718064 | 2.777325 | 2.835199 | 2.891744 | 2.947013 | 2.2 |
| 2.335317 | 2.393075 | 2.449380 | 2.504296 | 2.557881 | 2.610196 | 2.661291 | 2.0 |
| 2.207699 | 2.263128 | 2.317136 | 2.369789 | 2.421145 | 2.471263 | 2.520196 | 1.9 |
| 2.081568 | 2.134600 | 2.186248 | 2.236577 | 2.285648 | 2.333516 | 2.380235 | 1.8 |
| 1.956889 | 2.007454 | 2.056678 | 2.104624 | 2.151351 | 2.196917 | 2.241372 | 1.7 |
| 1.833619 | 1.881650 | 1.928385 | 1.973888 | 2.018215 | 2.061426 | 2.103570 | 1.6 |
| 1.711712 | 1.757142 | 1.801325 | 1.844325 | 1.886199 | 1.927003 | 1.966785 | 1.5 |
| 1.591117 | 1.633878 | 1.675447 | 1.715887 | 1.755254 | 1.793600 | 1.830973 | 1.4 |
| 1.471778 | 1.511804 | 1.550699 | 1.588522 | 1.625328 | 1.661167 | 1.696087 | 1.3 |
| 1.353632 | 1.390860 | 1.427022 | 1.462173 | 1.496368 | 1.529653 | 1.562075 | 1.2 |
| 1.236613 | 1.270982 | 1.304354 | 1.336782 | 1.368316 | 1.399003 | 1.428885 | 1.1 |
| 1.120650 | 1.152101 | 1.182629 | 1.212283 | 1.241111 | 1.269156 | 1.296458 | 1.0 |
| 1.005666 | 1.034144 | 1.061776 | 1.088610 | 1.114688 | 1.140051 | 1.164738 | 0.9 |
| 0.891579 | 0.917032 | 0.941722 | 0.965691 | 0.988980 | 1.011624 | 1.033658 | 0.8 |
| 0.778302 | 0.800684 | 0.822388 | 0.843453 | 0.863915 | 0.883806 | 0.903158 | 0.7 |
| 0.665746 | 0.685014 | 0.703693 | 0.721817 | 0.739420 | 0.756528 | 0.773169 | 0.6 |
| 0.553816 | 0.569931 | 0.585551 | 0.600704 | 0.615418 | 0.629717 | 0.643623 | 0.5 |
| 0.442411 | 0.455343 | 0.467874 | 0.480030 | 0.491831 | 0.503298 | 0.514447 | 0.4 |
| 0.331430 | 0.341154 | 0.350574 | 0.359710 | 0.368577 | 0.377195 | 0.385571 | 0.3 |
| 0.220776 | 0.227268 | 0.233558 | 0.239658 | 0.245580 | 0.251330 | 0.256923 | 0.2 |
| 0.110337 | 0.113584 | 0.116731 | 0.119784 | 0.122747 | 0.125625 | 0.128672 | 0.1 |
| 0.000000 | 0.000000 | 0.000000 | 0.000000 | 0.000000 | 0.000000 | 0.000000 | 0.0 |

## $v = \operatorname{arc} \Gamma(x+iy) = \Im\mathrm{m} \ln \Gamma(z)$

$\longrightarrow x$

| $y$ ↓ | 4.2 | 4.3 | 4.4 | 4.5 | 4.6 | 4.7 | 4.8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 10.0 | 18.171783 | 18.292896 | 18.413268 | 18.532703 | 18.651278 | 18.768995 | 18.885863 |
| 9.8 | 17.700261 | 17.820752 | 17.940390 | 18.059129 | 18.176994 | 18.293991 | 18.410124 |
| 9.6 | 17.232312 | 17.352125 | 17.471037 | 17.589056 | 17.706186 | 17.822435 | 17.937810 |
| 9.4 | 16.767992 | 16.887085 | 17.005263 | 17.122533 | 17.238903 | 17.354378 | 17.468966 |
| 9.2 | 16.307358 | 16.425703 | 16.543119 | 16.659615 | 16.775195 | 16.889869 | 17.003643 |
| 9.0 | 15.850468 | 15.968037 | 16.084664 | 16.200355 | 16.315117 | 16.428959 | 16.541888 |
| 8.8 | 15.397381 | 15.514144 | 15.629950 | 15.744806 | 15.858719 | 15.971699 | 16.083753 |
| 8.6 | 14.948159 | 15.064085 | 15.179038 | 15.293026 | 15.406059 | 15.518143 | 15.629288 |
| 8.4 | 14.502862 | 14.617918 | 14.731985 | 14.845071 | 14.957188 | 15.068343 | 15.178545 |
| 8.2 | 14.061556 | 14.175705 | 14.288850 | 14.400999 | 14.512164 | 14.622353 | 14.731575 |
| 8.0 | 13.624304 | 13.737509 | 13.849694 | 13.960869 | 14.071044 | 14.180228 | 14.288433 |
| 7.8 | 13.191171 | 13.303393 | 13.414579 | 13.524739 | 13.633884 | 13.742023 | 13.849169 |
| 7.6 | 12.762227 | 12.873423 | 12.983568 | 13.092670 | 13.200742 | 13.307795 | 13.413839 |
| 7.4 | 12.337539 | 12.447666 | 12.556724 | 12.664724 | 12.771678 | 12.877598 | 12.982496 |
| 7.2 | 11.917176 | 12.026186 | 12.134111 | 12.240961 | 12.346750 | 12.451490 | 12.555194 |
| 7.0 | 11.501259 | 11.609053 | 11.715794 | 11.821444 | 11.926017 | 12.029526 | 12.131986 |
| 6.8 | 11.089709 | 11.196333 | 11.301837 | 11.406234 | 11.509539 | 11.611765 | 11.712927 |
| 6.6 | 10.682748 | 10.788096 | 10.892307 | 10.995394 | 11.097374 | 11.198260 | 11.298069 |
| 6.4 | 10.280399 | 10.384411 | 10.487269 | 10.588987 | 10.689581 | 10.789069 | 10.887464 |
| 6.2 | 9.882734 | 9.985347 | 10.086787 | 10.187073 | 10.286219 | 10.384244 | 10.481164 |
| 6.0 | 9.489826 | 9.590971 | 9.690927 | 9.789712 | 9.887344 | 9.983840 | 10.079218 |
| 5.8 | 9.101747 | 9.201353 | 9.299753 | 9.396966 | 9.493011 | 9.587908 | 9.681673 |
| 5.6 | 8.718568 | 8.816558 | 8.913325 | 9.008891 | 9.103274 | 9.196496 | 9.288577 |
| 5.4 | 8.340360 | 8.436651 | 8.531704 | 8.625542 | 8.718184 | 8.809653 | 8.899969 |
| 5.2 | 7.967189 | 8.061695 | 8.154948 | 8.246971 | 8.337788 | 8.427420 | 8.515889 |
| 5.0 | 7.599120 | 7.691748 | 7.783110 | 7.873229 | 7.962130 | 8.049837 | 8.136372 |
| 4.8 | 7.236216 | 7.326868 | 7.416240 | 7.504358 | 7.591249 | 7.676938 | 7.761447 |
| 4.6 | 6.878533 | 6.967103 | 7.054382 | 7.140398 | 7.225178 | 7.308750 | 7.391138 |
| 4.4 | 6.526122 | 6.612498 | 6.697575 | 6.781381 | 6.863945 | 6.945296 | 7.025460 |
| 4.2 | 6.179026 | 6.263090 | 6.345849 | 6.427331 | 6.507568 | 6.586588 | 6.664421 |
| 4.0 | 5.837281 | 5.918908 | 5.999225 | 6.078263 | 6.156054 | 6.232630 | 6.308020 |
| 3.8 | 5.500911 | 5.579968 | 5.657713 | 5.734180 | 5.809403 | 5.883414 | 5.956244 |
| 3.6 | 5.169927 | 5.246274 | 5.321312 | 5.395075 | 5.467600 | 5.538920 | 5.609068 |
| 3.4 | 4.844328 | 4.917817 | 4.990002 | 5.060923 | 5.130615 | 5.199114 | 5.266452 |
| 3.2 | 4.524092 | 4.594567 | 4.663752 | 4.731685 | 4.798403 | 4.863945 | 4.928343 |
| 3.0 | 4.209179 | 4.276479 | 4.342506 | 4.407300 | 4.470900 | 4.533344 | 4.594667 |
| 2.8 | 3.899525 | 3.963481 | 4.026188 | 4.087688 | 4.148020 | 4.207223 | 4.265332 |
| 2.6 | 3.595039 | 3.655478 | 3.714699 | 3.772745 | 3.829655 | 3.885469 | 3.940225 |
| 2.4 | 3.295601 | 3.352345 | 3.407909 | 3.462338 | 3.515671 | 3.567949 | 3.619208 |
| 2.2 | 3.001058 | 3.053925 | 3.105660 | 3.156308 | 3.205908 | 3.254500 | 3.302121 |
| 2.0 | 2.711219 | 2.760027 | 2.807761 | 2.854463 | 2.900174 | 2.944932 | 2.988773 |
| 1.9 | 2.567994 | 2.614705 | 2.660373 | 2.705042 | 2.748750 | 2.791536 | 2.833436 |
| 1.8 | 2.425855 | 2.470423 | 2.513984 | 2.556579 | 2.598247 | 2.639026 | 2.678951 |
| 1.7 | 2.284768 | 2.327150 | 2.368561 | 2.409043 | 2.448634 | 2.487371 | 2.525286 |
| 1.6 | 2.144694 | 2.184846 | 2.224067 | 2.262397 | 2.299875 | 2.336535 | 2.372410 |
| 1.5 | 2.005593 | 2.043472 | 2.080463 | 2.116604 | 2.151933 | 2.186483 | 2.220286 |
| 1.4 | 1.867421 | 1.902983 | 1.937708 | 1.971624 | 2.004769 | 2.037177 | 2.068878 |
| 1.3 | 1.730132 | 1.763343 | 1.795758 | 1.827414 | 1.858343 | 1.888577 | 1.918146 |
| 1.2 | 1.593676 | 1.624495 | 1.654568 | 1.683929 | 1.712611 | 1.740642 | 1.768052 |
| 1.1 | 1.458002 | 1.486392 | 1.514089 | 1.541124 | 1.567528 | 1.593329 | 1.618554 |
| 1.0 | 1.323056 | 1.348982 | 1.374270 | 1.398950 | 1.423048 | 1.446593 | 1.469607 |
| 0.9 | 1.188780 | 1.212210 | 1.235060 | 1.257356 | 1.279123 | 1.300386 | 1.321167 |
| 0.8 | 1.055114 | 1.076020 | 1.096404 | 1.116290 | 1.135701 | 1.154661 | 1.173188 |
| 0.7 | 0.921998 | 0.940352 | 0.958245 | 0.975698 | 0.992732 | 1.009367 | 1.025621 |
| 0.6 | 0.789367 | 0.805146 | 0.820525 | 0.835525 | 0.850162 | 0.864455 | 0.878419 |
| 0.5 | 0.657157 | 0.670338 | 0.683165 | 0.695713 | 0.707937 | 0.719872 | 0.731531 |
| 0.4 | 0.526298 | 0.535865 | 0.546162 | 0.556203 | 0.566000 | 0.575564 | 0.584907 |
| 0.3 | 0.393724 | 0.401662 | 0.409396 | 0.416936 | 0.424295 | 0.431478 | 0.438494 |
| 0.2 | 0.262363 | 0.267661 | 0.272823 | 0.277857 | 0.282766 | 0.287559 | 0.292241 |
| 0.1 | 0.131146 | 0.133797 | 0.136380 | 0.138900 | 0.141355 | 0.143752 | 0.146094 |
| 0.0 | 0.000000 | 0.000000 | 0.000000 | 0.000000 | 0.000000 | 0.000000 | 0.000000 |

$v = \operatorname{arc} \Gamma(x+iy) = \Im\mathrm{m} \ln \Gamma(z)$

$\longrightarrow x$

| 4.9 | 5.0 | 5.1 | 5.2 | 5.3 | 5.4 | 5.5 | $y$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 19.001886 | 19.117071 | 19.231424 | 19.344952 | 19.457594 | 19.569557 | 19.680646 | 10.0 |
| 18.525403 | 18.639831 | 18.753416 | 18.866165 | 18.978068 | 19.089181 | 19.199461 | 9.8 |
| 18.052316 | 18.165962 | 18.278753 | 18.390698 | 18.501801 | 18.612071 | 18.721515 | 9.6 |
| 17.582674 | 17.695510 | 17.807480 | 17.918591 | 18.028852 | 18.138268 | 18.246848 | 9.4 |
| 17.116524 | 17.228521 | 17.339640 | 17.449890 | 17.559278 | 17.667810 | 17.775497 | 9.2 |
| 16.653913 | 16.765041 | 16.875280 | 16.984637 | 17.093122 | 17.200741 | 17.307503 | 9.0 |
| 16.194890 | 16.305117 | 16.414443 | 16.522876 | 16.630425 | 16.737099 | 16.842905 | 8.8 |
| 15.739503 | 15.848796 | 15.957177 | 16.064653 | 16.171233 | 16.276927 | 16.381744 | 8.6 |
| 15.287804 | 15.396128 | 15.503528 | 15.610011 | 15.715588 | 15.820268 | 15.924058 | 8.4 |
| 14.839841 | 14.947160 | 15.053543 | 15.158996 | 15.263532 | 15.367150 | 15.469889 | 8.2 |
| 14.395667 | 14.501942 | 14.607267 | 14.711653 | 14.815109 | 14.917647 | 15.019276 | 8.0 |
| 13.955331 | 14.060522 | 14.164750 | 14.268026 | 14.370363 | 14.471770 | 14.572257 | 7.8 |
| 13.518886 | 13.622949 | 13.726036 | 13.828162 | 13.929335 | 14.029569 | 14.128872 | 7.6 |
| 13.086[illegible]83 | 13.189273 | 13.291176 | 13.392104 | 13.492070 | 13.591085 | 13.689160 | 7.4 |
| 12.657874 | 12.759[illegible]43 | 12.860213 | 12.959898 | 13.058608 | 13.156358 | 13.253158 | 7.2 |
| 12.233409 | 12.333807 | 12.433195 | 12.531585 | 12.628993 | 12.725426 | 12.820902 | 7.0 |
| 11.813039 | 11.912114 | 12.010166 | 12.107210 | 12.203260 | 12.298328 | 12.392429 | 6.8 |
| 11.396814 | 11.494510 | 11.591172 | 11.686815 | 11.871455 | 11.875100 | 11.967772 | 6.6 |
| 10.984783 | 11.081042 | 11.176255 | 11.270439 | 11.363608 | 11.455778 | 11.546963 | 6.4 |
| 10.576995 | 10.671754 | 10.765457 | 10.858120 | 10.949760 | 11.040392 | 11.130032 | 6.2 |
| 10.173495 | 10.266689 | 10.358818 | 10.449896 | 10.539943 | 10.628975 | 10.717008 | 6.0 |
| 9.774327 | 9.865888 | 9.956373 | 10.045800 | 10.134188 | 10.221554 | 10.307914 | 5.8 |
| 9.379534 | 9.469388 | 9.558158 | 9.645863 | 9.732522 | 9.818152 | 9.902772 | 5.6 |
| 8.989152 | 9.077224 | 9.164205 | 9.250113 | 9.334969 | 9.418791 | 9.501600 | 5.4 |
| 8.603217 | 8.689427 | 8.774537 | 8.858571 | 8.941548 | 9.023487 | 9.104411 | 5.2 |
| 8.221760 | 8.306022 | 8.389180 | 8.471257 | 8.552274 | 8.632251 | 8.711211 | 5.0 |
| 7.844803 | 7.927029 | 8.008148 | 8.088183 | 8.167156 | 8.245089 | 8.322003 | 4.8 |
| 7.472368 | 7.552464 | 7.631451 | 7.709355 | 7.786196 | 7.861999 | 7.936785 | 4.6 |
| 7.104463 | 7.182333 | 7.259094 | 7.334772 | 7.409390 | 7.482972 | 7.555544 | 4.4 |
| 6.741097 | 6.816634 | 6.891069 | 6.964424 | 7.036724 | 7.107995 | 7.178260 | 4.2 |
| 6.382253 | 6.455358 | 6.527362 | 6.598294 | 6.668177 | 6.737040 | 6.804906 | 4.0 |
| 6.027922 | 6.098481 | 6.167947 | 6.236350 | 6.303716 | 6.370071 | 6.435440 | 3.8 |
| 5.678074 | 5.745971 | 5.812788 | 5.878554 | 5.943296 | 6.007041 | 6.069816 | 3.6 |
| 5.332664 | 5.397781 | 5.461833 | 5.524849 | 5.586860 | 5.647891 | 5.707971 | 3.4 |
| 4.991633 | 5.053846 | 5.115015 | 5.175169 | 5.234337 | 5.292548 | 5.349829 | 3.2 |
| 4.654904 | 4.714090 | 4.772253 | 4.829428 | 4.885643 | 4 940925 | 4.995303 | 3.0 |
| 4.322385 | 4.378413 | 4.433450 | 4.487527 | 4.540673 | 4.592918 | 4.644288 | 2.8 |
| 3.993957 | 4.046700 | 4.098486 | 4.149346 | 4.199311 | 4.248408 | 4.296664 | 2.6 |
| 3.669485 | 3.718812 | 3.767223 | 3.814747 | 3.861416 | 3.907256 | 3.952295 | 2.4 |
| 3.348805 | 3.394588 | 3.439499 | 3.483571 | 3.526832 | 3.569308 | 3.611027 | 2.2 |
| 3.031732 | 3.073843 | 3.115135 | 3.155638 | 3.195381 | 3.234388 | 3.272687 | 2.0 |
| 2.874484 | 2.914712 | 2.954149 | 2.992826 | 3.030769 | 3.068004 | 3.104558 | 1.9 |
| 2.718055 | 2.756370 | 2.793924 | 2.830747 | 2.866865 | 2.902303 | 2.937086 | 1.8 |
| 2.562416 | 2.598787 | 2.634430 | 2.669373 | 2.703640 | 2.737257 | 2.770247 | 1.7 |
| 2.407532 | 2.441933 | 2.475642 | 2.508673 | 2.541065 | 2.572838 | 2.604013 | 1.6 |
| 2.253373 | 2.285773 | 2.317513 | 2.348617 | 2.379111 | 2.409016 | 2.438355 | 1.5 |
| 2.099901 | 2.130275 | 2.160023 | 2.189172 | 2.217744 | 2.245760 | 2.273243 | 1.4 |
| 1.947078 | 1.975399 | 2.003133 | 2.030303 | 2.056932 | 2.083039 | 2.108646 | 1.3 |
| 1.794867 | 1.821110 | 1.846806 | 1.871976 | 1.896641 | 1.920820 | 1.944531 | 1.2 |
| 1.643226 | 1.667369 | 1.691005 | 1.714154 | 1.736835 | 1.759067 | 1.780867 | 1.1 |
| 1.492114 | 1.514135 | 1.535690 | 1.556799 | 1.577479 | 1.597747 | 1.617619 | 1.0 |
| 1.341487 | 1.361366 | 1.380823 | 1.399873 | 1.418534 | 1.436823 | 1.454751 | 0.9 |
| 1.191301 | 1.209020 | 1.226360 | 1.243336 | 1.259964 | 1.276257 | 1.292229 | 0.8 |
| 1.041511 | 1.057052 | 1.072259 | 1.087147 | 1.101727 | 1.116014 | 1.130016 | 0.7 |
| 0.892069 | 0.905418 | 0.918479 | 0.931265 | 0.943786 | 0.956053 | 0.968076 | 0.6 |
| 0.742928 | 0.754072 | 0.764975 | 0.775647 | 0.786097 | 0.796335 | 0.806370 | 0.5 |
| 0.594038 | 0.602966 | 0.611701 | 0.620250 | 0.628621 | 0.636822 | 0.644859 | 0.4 |
| 0.445349 | 0.452055 | 0.458611 | 0.465031 | 0.471316 | 0.477472 | 0.483504 | 0.3 |
| 0.296817 | 0.301289 | 0.305665 | 0.309946 | 0.314139 | 0.318247 | 0.322272 | 0.2 |
| 0.148382 | 0.150620 | 0.153057 | 0.154951 | 0.157048 | 0.159103 | 0.161119 | 0.1 |
| 0.000000 | 0.000000 | 0.000000 | 0.000000 | 0.000000 | 0.000000 | 0.000000 | 0.0 |

$$v = \operatorname{arc} \Gamma(x+iy) = \Im\mathrm{m} \ln \Gamma(z)$$

$\longrightarrow x$

| $y$ ↑ | 5.6 | 5.7 | 5.8 | 5.9 | 6.0 | 6.2 | 6.4 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 10.0 | 19.790936 | 19.900431 | 20.009139 | 20.117066 | 20.224220 | 20.436229 | 20.645221 |
| 9.8 | 19.308931 | 19.417599 | 19.525470 | 19.632551 | 19.738850 | 19.949125 | 20.156351 |
| 9.6 | 18.830140 | 18.937952 | 19.044958 | 19.151166 | 19.256583 | 19.465071 | 19.670478 |
| 9.4 | 18.354598 | 18.461526 | 18.567641 | 18.672947 | 18.777454 | 18.984097 | 19.187630 |
| 9.2 | 17.882344 | 17.988360 | 18.093552 | 18.197927 | 18.301495 | 18.506235 | 18.707834 |
| 9.0 | 17.413416 | 17.518488 | 17.622727 | 17.726141 | 17.828738 | 18.031514 | 18.231118 |
| 8.8 | 16.947852 | 17.051949 | 17.155203 | 17.257623 | 17.359218 | 17.559965 | 17.757510 |
| 8.6 | 16.485691 | 16.588778 | 16.691014 | 16.792407 | 16.892966 | 17.091617 | 17.287037 |
| 8.4 | 16.026971 | 16.129013 | 16.230195 | 16.330526 | 16.430014 | 16.626500 | 16.819726 |
| 8.2 | 15.571730 | 15.672691 | 15.772782 | 15.872013 | 15.970395 | 16.164643 | 16.355603 |
| 8.0 | 15.120006 | 15.219847 | 15.318809 | 15.416903 | 15.514139 | 15.706074 | 15.894694 |
| 7.8 | 14.671836 | 14.770517 | 14.868310 | 14.965227 | 15.061278 | 15.250820 | 15.437021 |
| 7.6 | 14.227258 | 14.324737 | 14.421319 | 14.517016 | 14.611840 | 14.798908 | 14.982609 |
| 7.4 | 13.786308 | 13.882540 | 13.977868 | 14.072302 | 14.165856 | 14.350363 | 14.531480 |
| 7.2 | 13.349022 | 13.443961 | 13.537988 | 13.631114 | 13.723352 | 13.905209 | 14.083653 |
| 7.0 | 12.915435 | 13.009031 | 13.101709 | 13.193479 | 13.284354 | 13.463468 | 13.639149 |
| 6.8 | 12.485576 | 12.577782 | 12.669060 | 12.759425 | 12.848887 | 13.025160 | 13.197981 |
| 6.6 | 12.059481 | 12.150241 | 12.240069 | 12.328975 | 12.416974 | 12.590305 | 12.760168 |
| 6.4 | 11.637178 | 11.726439 | 11.814759 | 11.902153 | 11.988635 | 12.158919 | 12.325720 |
| 6.2 | 11.218695 | 11.306398 | 11.393154 | 11.478979 | 11.563888 | 11.731014 | 11.894646 |
| 6.0 | 10.804057 | 10.890141 | 10.975273 | 11.059470 | 11.142747 | 11.306602 | 11.466956 |
| 5.8 | 10.393286 | 10.477687 | 10.561133 | 10.643640 | 10.725225 | 10.885690 | 11.042651 |
| 5.6 | 9.986399 | 10.069052 | 10.150747 | 10.231500 | 10.311330 | 10.468282 | 10.621730 |
| 5.4 | 9.583412 | 9.664246 | 9.744123 | 9.823056 | 9.901065 | 10.054376 | 10.204189 |
| 5.2 | 9.184334 | 9.263281 | 9.341266 | 9.418310 | 9.494430 | 9.643969 | 9.790020 |
| 5.0 | 8.789171 | 8.866153 | 8.942176 | 9.017258 | 9.091420 | 9.237050 | 9.379207 |
| 4.8 | 8.397921 | 8.472862 | 8.546846 | 8.619893 | 8.692022 | 8.833602 | 8.971731 |
| 4.6 | 8.010577 | 8.083396 | 8.155263 | 8.226197 | 8.296220 | 8.433605 | 8.567567 |
| 4.4 | 7.627125 | 7.697739 | 7.767407 | 7.836150 | 7.903988 | 8.037029 | 8.166683 |
| 4.2 | 7.247542 | 7.315866 | 7.383251 | 7.449720 | 7.515294 | 7.643838 | 7.769039 |
| 4.0 | 6.871798 | 6.937741 | 7.002758 | 7.066870 | 7.130099 | 7.253989 | 7.374589 |
| 3.8 | 6.499850 | 6.563323 | 6.625883 | 6.687555 | 6.748352 | 6.867430 | 6.983278 |
| 3.6 | 6.131646 | 6.192556 | 6.252569 | 6.311707 | 6.369994 | 6.484098 | 6.595044 |
| 3.4 | 5.767124 | 5.825375 | 5.882749 | 5.939269 | 5.994957 | 6.103924 | 6.209813 |
| 3.2 | 5.406205 | 5.461703 | 5.516346 | 5.570157 | 5.623159 | 5.726824 | 5.827503 |
| 3.0 | 5.048802 | 5.101449 | 5.153266 | 5.204279 | 5.254509 | 5.352707 | 5.448023 |
| 2.8 | 4.694809 | 4.744507 | 4.793407 | 4.841531 | 4.888902 | 4.981469 | 5.071270 |
| 2.6 | 4.344106 | 4.390760 | 4.436648 | 4.481794 | 4.526219 | 4.612994 | 4.697131 |
| 2.4 | 3.996559 | 4.040071 | 4.082856 | 4.124936 | 4.166332 | 4.247155 | 4.325481 |
| 2.2 | 3.652013 | 3.692291 | 3.731883 | 3.770810 | 3.809095 | 3.883812 | 3.956184 |
| 2.0 | 3.310301 | 3.347253 | 3.383565 | 3.419256 | 3.454350 | 3.522812 | 3.589094 |
| 1.9 | 3.140450 | 3.175705 | 3.210346 | 3.244390 | 3.277859 | 3.343140 | 3.406328 |
| 1.8 | 2.971235 | 3.004774 | 3.037722 | 3.070100 | 3.101925 | 3.163990 | 3.224054 |
| 1.7 | 2.802631 | 2.834432 | 2.865668 | 2.896361 | 2.926526 | 2.985343 | 3.042249 |
| 1.6 | 2.634612 | 2.664655 | 2.694161 | 2.723148 | 2.751636 | 2.807171 | 2.860893 |
| 1.5 | 2.467147 | 2.495413 | 2.523171 | 2.550438 | 2.577230 | 2.629455 | 2.679963 |
| 1.4 | 2.300210 | 2.326680 | 2.352672 | 2.378200 | 2.403284 | 2.452166 | 2.499435 |
| 1.3 | 2.133769 | 2.158426 | 2.182635 | 2.206410 | 2.229767 | 2.275282 | 2.319285 |
| 1.2 | 1.967793 | 1.990621 | 2.013031 | 2.035038 | 2.056655 | 2.098775 | 2.139489 |
| 1.1 | 1.802250 | 1.823234 | 1.843830 | 1.864054 | 1.883919 | 1.922619 | 1.960022 |
| 1.0 | 1.637109 | 1.656232 | 1.675002 | 1.693431 | 1.711530 | 1.746787 | 1.780858 |
| 0.9 | 1.472334 | 1.489584 | 1.506515 | 1.523136 | 1.539459 | 1.571252 | 1.601971 |
| 0.8 | 1.307892 | 1.323258 | 1.338336 | 1.353139 | 1.367675 | 1.395985 | 1.423336 |
| 0.7 | 1.143748 | 1.157212 | 1.170434 | 1.183408 | 1.196148 | 1.220958 | 1.244924 |
| 0.6 | 0.979865 | 0.991428 | 1.002774 | 1.013911 | 1.024847 | 1.046141 | 1.066710 |
| 0.5 | 0.816207 | 0.825856 | 0.835324 | 0.844616 | 0.853740 | 0.871506 | 0.888665 |
| 0.4 | 0.652738 | 0.660466 | 0.668048 | 0.675490 | 0.682796 | 0.697022 | 0.710761 |
| 0.3 | 0.489420 | 0.495222 | 0.500913 | 0.506498 | 0.511983 | 0.522660 | 0.532971 |
| 0.2 | 0.326217 | 0.330087 | 0.333883 | 0.337611 | 0.341267 | 0.348389 | 0.355267 |
| 0.1 | 0.163090 | 0.165025 | 0.166924 | 0.168788 | 0.170617 | 0.174179 | 0.177619 |
| 0.0 | 0.000000 | 0.000000 | 0.000000 | 0.000000 | 0.000000 | 0.000000 | 0.000000 |

$v = \operatorname{arc} \Gamma(x+iy) = \Im\mathfrak{m} \ln \Gamma(z)$

$\longrightarrow x$

| 6.6 | 6.8 | 7.0 | 7.2 | 7.4 | 7.6 | 7.8 | $y$ ↑ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 20.851243 | 21.054352 | 21.254596 | 21.452030 | 21.646704 | 21.838667 | 22.027971 | 10.0 |
| 20.360581 | 20.561870 | 20.760271 | 20.955838 | 21.148623 | 21.338680 | 21.526061 | 9.8 |
| 19.872862 | 20.072277 | 20.268780 | 20.462427 | 20.653272 | 20.841371 | 21.026776 | 9.6 |
| 19.388110 | 19.585596 | 19.780146 | 19.971817 | 20.160668 | 20.346754 | 20.530131 | 9.4 |
| 18.906352 | 19.101850 | 19.294389 | 19.484029 | 19.670828 | 19.854845 | 20.036138 | 9.2 |
| 18.427613 | 18.621064 | 18.811532 | 18.999080 | 19.183770 | 19.365661 | 19.544813 | 9.0 |
| 17.951919 | 18.143260 | 18.331595 | 18.516991 | 18.699510 | 18.879215 | 19.056167 | 8.8 |
| 17.479295 | 17.668460 | 17.854598 | 18.037778 | 18.218064 | 18.395521 | 18.570213 | 8.6 |
| 17.009764 | 17.196686 | 17.380561 | 17.561458 | 17.739446 | 17.914592 | 18.086961 | 8.4 |
| 16.543351 | 16.727959 | 16.909500 | 17.088047 | 17.263670 | 17.436439 | 17.606420 | 8.2 |
| 16.080076 | 16.262297 | 16.441434 | 16.617560 | 16.790749 | 16.961072 | 17.128600 | 8.0 |
| 15.619961 | 15.799721 | 15.976378 | 16.150010 | 16.320693 | 16.488501 | 16.653505 | 7.8 |
| 15.163028 | 15.340246 | 15.514347 | 15.685410 | 15.853513 | 16.018732 | 16.181143 | 7.6 |
| 14.709293 | 14.883890 | 15.055354 | 15.223769 | 15.389215 | 15.551772 | 15.711516 | 7.4 |
| 14.258775 | 14.430664 | 14.599410 | 14.765096 | 14.927807 | 15.087624 | 15.244626 | 7.2 |
| 13.811490 | 13.980584 | 14.146524 | 14.309398 | 14.469292 | 14.626290 | 14.780474 | 7.0 |
| 13.367448 | 13.533657 | 13.696704 | 13.856680 | 14.013673 | 14.167770 | 14.319056 | 6.8 |
| 12.926664 | 13.089894 | 13.249956 | 13.406943 | 13.560949 | 13.712062 | 13.860368 | 6.6 |
| 12.489145 | 12.649298 | 12.806280 | 12.960188 | 13.111118 | 13.259160 | 13.404403 | 6.4 |
| 12.054898 | 12.211873 | 12.365678 | 12.516412 | 12.664174 | 12.809056 | 12.951150 | 6.2 |
| 11.623925 | 11.777619 | 11.928145 | 12.075608 | 12.220108 | 12.361740 | 12.500598 | 6.0 |
| 11.196226 | 11.346531 | 11.493676 | 11.637767 | 11.778908 | 11.917193 | 12.052730 | 5.8 |
| 10.771797 | 10.918602 | 11.062259 | 11.202876 | 11.340560 | 11.475411 | 11.607527 | 5.6 |
| 10.350630 | 10.493822 | 10.633880 | 10.770918 | 10.905044 | 11.036360 | 11.164965 | 5.4 |
| 9.932712 | 10.072173 | 10.208521 | 10.341872 | 10.472336 | 10.600018 | 10.725019 | 5.2 |
| 9.518026 | 9.653635 | 9.786058 | 9.915712 | 10.042410 | 10.166357 | 10.287658 | 5.0 |
| 9.106547 | 9.238183 | 9.366763 | 9.492498 | 9.615232 | 9.735344 | 9.852846 | 4.8 |
| 8.698249 | 8.825784 | 8.950302 | 9.071925 | 9.190766 | 9.306938 | 9.420544 | 4.6 |
| 8.293095 | 8.416403 | 8.536737 | 8.654220 | 8.768970 | 8.881097 | 8.590708 | 4.4 |
| 7.891044 | 8.009994 | 8.126020 | 8.239248 | 8.349795 | 8.457773 | 8.563288 | 4.2 |
| 7.492048 | 7.606508 | 7.718101 | 7.826955 | 7.933188 | 8.036912 | 8.138232 | 4.0 |
| 7.096049 | 7.205885 | 7.312921 | 7.417283 | 7.519090 | 7.618453 | 7.715478 | 3.8 |
| 6.702984 | 6.808062 | 6.910414 | 7.010165 | 7.107433 | 7.202331 | 7.294962 | 3.6 |
| 6.312780 | 6.412965 | 6.510506 | 6.605528 | 6.698147 | 6.788475 | 6.876613 | 3.4 |
| 5.925352 | 6.020512 | 6.113117 | 6.203291 | 6.291151 | 6.376805 | 6.460354 | 3.2 |
| 5.540611 | 5.630612 | 5.718157 | 5.803368 | 5.886360 | 5.967239 | 6.046104 | 3.0 |
| 5.158457 | 5.243166 | 5.325529 | 5.405663 | 5.483681 | 5.559686 | 5.633773 | 2.8 |
| 4.778777 | 4.858067 | 4.935127 | 5.010073 | 5.083014 | 5.154047 | 5.223268 | 2.6 |
| 4.401450 | 4.475196 | 4.546838 | 4.616489 | 4.684251 | 4.750221 | 4.814489 | 2.4 |
| 4.026347 | 4.094427 | 4.160540 | 4.224791 | 4.287280 | 4.348098 | 4.407328 | 2.2 |
| 3.653325 | 3.715624 | 3.776100 | 3.834854 | 3.891979 | 3.947560 | 4.001676 | 2.0 |
| 3.467548 | 3.526915 | 3.584535 | 3.640505 | 3.694915 | 3.747847 | 3.799378 | 1.9 |
| 3.282233 | 3.338642 | 3.393382 | 3.446545 | 3.498222 | 3.548485 | 3.597413 | 1.8 |
| 3.097362 | 3.150787 | 3.202623 | 3.252959 | 3.301879 | 3.349458 | 3.395766 | 1.7 |
| 2.912911 | 2.963328 | 3.012238 | 3.059726 | 3.105872 | 3.150747 | 3.194419 | 1.6 |
| 2.728861 | 2.776247 | 2.822209 | 2.866829 | 2.910182 | 2.952337 | 2.993358 | 1.5 |
| 2.545189 | 2.589520 | 2.632515 | 2.674248 | 2.714792 | 2.754211 | 2.792566 | 1.4 |
| 2.361871 | 2.403128 | 2.443136 | 2.481965 | 2.519683 | 2.556351 | 2.592026 | 1.3 |
| 2.178886 | 2.217049 | 2.254051 | 2.289960 | 2.324837 | 2.358740 | 2.391721 | 1.2 |
| 1.996210 | 2.031260 | 2.065239 | 2.098211 | 2.130234 | 2.161359 | 2.191636 | 1.1 |
| 1.813818 | 1.845737 | 1.876679 | 1.906700 | 1.935854 | 1.964189 | 1.991750 | 1.0 |
| 1.631686 | 1.660459 | 1.688349 | 1.715406 | 1.741680 | 1.767214 | 1.792047 | 0.9 |
| 1.449789 | 1.475402 | 1.500226 | 1.524308 | 1.547691 | 1.570413 | 1.592511 | 0.8 |
| 1.268103 | 1.290543 | 1.312290 | 1.333385 | 1.353866 | 1.373768 | 1.393122 | 0.7 |
| 1.086600 | 1.105856 | 1.124516 | 1.142615 | 1.160187 | 1.177260 | 1.193863 | 0.6 |
| 0.905257 | 0.921318 | 0.936882 | 0.951977 | 0.966631 | 0.980870 | 0.994716 | 0.5 |
| 0.724046 | 0.736905 | 0.749364 | 0.761449 | 0.773180 | 0.784578 | 0.795661 | 0.4 |
| 0.542941 | 0.552591 | 0.561941 | 0.571009 | 0.579812 | 0.588364 | 0.596680 | 0.3 |
| 0.361916 | 0.368352 | 0.374588 | 0.380636 | 0.386506 | 0.392210 | 0.397756 | 0.2 |
| 0.180945 | 0.184164 | 0.187282 | 0.190307 | 0.193243 | 0.196095 | 0.198868 | 0.1 |
| 0.000000 | 0.000000 | 0.000000 | 0.000000 | 0.000000 | 0.000000 | 0.000000 | 0.0 |

$$v=\operatorname{arc}\Gamma(x+iy)=\Im\mathfrak{m}\ln\Gamma(z)$$

$\longrightarrow x$

| y | 8.0 | 8.2 | 8.4 | 8.6 | 8.8 | 9.0 | 9.2 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 10.0 | 22.214663 | 22.398803 | 22.580429 | 22.759592 | 22.936341 | 23.110722 | 23.282782 |
| 9.8 | 21.710818 | 21.893001 | 22.072661 | 22.249848 | 22.424611 | 22.596997 | 22.767055 |
| 9.6 | 21.209543 | 21.389722 | 21.567367 | 21.742528 | 21.915256 | 22.085601 | 22.253610 |
| 9.4 | 20.710854 | 20.888978 | 21.064556 | 21.237641 | 21.408285 | 21.576539 | 21.742452 |
| 9.2 | 20.214764 | 20.390779 | 20.564238 | 20.735195 | 20.903704 | 21.069817 | 21.233585 |
| 9.0 | 19.721285 | 19.895136 | 20.066421 | 20.235197 | 20.401519 | 20.565439 | 20.727012 |
| 8.8 | 19.230429 | 19.402058 | 19.571114 | 19.737653 | 19.901734 | 20.063410 | 20.222735 |
| 8.6 | 18.742203 | 18.911553 | 19.078322 | 19.242569 | 19.404353 | 19.563730 | 19.720756 |
| 8.4 | 18.256619 | 18.423628 | 18.588051 | 18.749948 | 18.909379 | 19.066402 | 19.221074 |
| 8.2 | 17.773682 | 17.938289 | 18.100306 | 18.259793 | 18.416813 | 18.571426 | 18.723688 |
| 8.0 | 17.293400 | 17.455541 | 17.615088 | 17.772106 | 17.926655 | 18.078799 | 18.228594 |
| 7.8 | 16.815778 | 16.975387 | 17.132401 | 17.286885 | 17.438904 | 17.588519 | 17.735791 |
| 7.6 | 16.340818 | 16.497828 | 16.652243 | 16.802130 | 16.953555 | 17.100551 | 17.245270 |
| 7.4 | 15.868523 | 16.022865 | 16.174613 | 16.323837 | 16.470605 | 16.614980 | 16.757026 |
| 7.2 | 15.398891 | 15.550494 | 15.699507 | 15.846001 | 15.990046 | 16.131707 | 16.271048 |
| 7.0 | 14.931922 | 15.080712 | 15.226921 | 15.370615 | 15.511870 | 15.650752 | 15.787327 |
| 6.8 | 14.467611 | 14.613514 | 14.756843 | 14.897670 | 15.036067 | 15.172105 | 15.305849 |
| 6.6 | 14.005950 | 14.148891 | 14.289267 | 14.427153 | 14.562625 | 14.695750 | 14.826599 |
| 6.4 | 13.546932 | 13.686831 | 13.824179 | 13.959053 | 14.091527 | 14.221673 | 14.349560 |
| 6.2 | 13.090544 | 13.227321 | 13.361564 | 13.493351 | 13.622756 | 13.749854 | 13.874714 |
| 6.0 | 12.636772 | 12.770346 | 12.901406 | 13.030029 | 13.156294 | 13.280273 | 13.402037 |
| 5.8 | 12.185597 | 12.315886 | 12.443683 | 12.569067 | 12.692116 | 12.812905 | 12.931506 |
| 5.6 | 11.737000 | 11.863919 | 11.988371 | 12.110438 | 12.230198 | 12.347726 | 12.463095 |
| 5.4 | 11.290956 | 11.414419 | 11.535445 | 11.654116 | 11.770510 | 11.884705 | 11.996772 |
| 5.2 | 10.847435 | 10.967357 | 11.084874 | 11.200069 | 11.313022 | 11.423810 | 11.532507 |
| 5.0 | 10.406308 | 10.522700 | 10.636624 | 10.748263 | 10.857698 | 10.964907 | 11.070262 |
| 4.8 | 9.967837 | 10.080411 | 10.190657 | 10.298660 | 10.404501 | 10.508256 | 10.610000 |
| 4.6 | 9.531683 | 9.640449 | 9.746933 | 9.851218 | 9.953388 | 10.053517 | 10.151678 |
| 4.4 | 9.097900 | 9.202769 | 9.305405 | 9.405893 | 9.504314 | 9.600743 | 9.695255 |
| 4.2 | 8.666440 | 8.767322 | 8.866026 | 8.962635 | 9.057230 | 9.149887 | 9.240678 |
| 4.0 | 8.237247 | 8.334054 | 8.428740 | 8.521390 | 8.612083 | 8.700895 | 8.787898 |
| 3.8 | 7.810264 | 7.902905 | 7.993489 | 8.082100 | 8.168816 | 8.253712 | 8.336858 |
| 3.6 | 7.385425 | 7.473812 | 7.560212 | 7.644705 | 7.727370 | 7.808279 | 7.887501 |
| 3.4 | 6.962660 | 7.046707 | 7.128839 | 7.209137 | 7.287677 | 7.364531 | 7.439765 |
| 3.2 | 6.541895 | 6.621515 | 6.699300 | 6.775327 | 6.849671 | 6.922401 | 6.993583 |
| 3.0 | 6.123048 | 6.198159 | 6.271517 | 6.343200 | 6.413278 | 6.481819 | 6.548887 |
| 2.8 | 5.706035 | 5.776554 | 5.845410 | 5.912676 | 5.978421 | 6.042710 | 6.105604 |
| 2.6 | 5.290763 | 5.356612 | 5.420892 | 5.483672 | 5.545019 | 5.604995 | 5.663658 |
| 2.4 | 4.877136 | 4.938239 | 4.997872 | 5.056100 | 5.112988 | 5.168592 | 5.222970 |
| 2.2 | 4.465050 | 4.521337 | 4.576255 | 4.629869 | 4.682238 | 4.733417 | 4.783457 |
| 2.0 | 4.054400 | 4.105801 | 4.155943 | 4.204883 | 4.252678 | 4.299379 | 4.345033 |
| 1.9 | 3.849578 | 3.898513 | 3.946243 | 3.992826 | 4.038314 | 4.082758 | 4.126202 |
| 1.8 | 3.645072 | 3.691524 | 3.736831 | 3.781042 | 3.824212 | 3.866387 | 3.907610 |
| 1.7 | 3.440868 | 3.484824 | 3.527691 | 3.569519 | 3.610358 | 3.650253 | 3.689245 |
| 1.6 | 3.236949 | 3.278395 | 3.318810 | 3.358243 | 3.396741 | 3.434345 | 3.471096 |
| 1.5 | 3.033302 | 3.072225 | 3.110175 | 3.147201 | 3.183346 | 3.218650 | 3.253151 |
| 1.4 | 2.829910 | 2.866296 | 2.901772 | 2.936380 | 2.970162 | 3.003156 | 3.035398 |
| 1.3 | 2.626758 | 2.660596 | 2.693584 | 2.725765 | 2.757174 | 2.787850 | 2.817824 |
| 1.2 | 2.423829 | 2.455108 | 2.485599 | 2.515342 | 2.544370 | 2.572719 | 2.600418 |
| 1.1 | 2.221107 | 2.249817 | 2.277802 | 2.305097 | 2.331738 | 2.357750 | 2.383167 |
| 1.0 | 2.018576 | 2.044706 | 2.070176 | 2.095017 | 2.119259 | 2.142931 | 2.166058 |
| 0.9 | 1.816219 | 1.839761 | 1.862707 | 1.885086 | 1.906924 | 1.928248 | 1.949080 |
| 0.8 | 1.614018 | 1.634965 | 1.655381 | 1.675290 | 1.694718 | 1.713687 | 1.732219 |
| 0.7 | 1.411958 | 1.430303 | 1.448180 | 1.465614 | 1.482626 | 1.499236 | 1.515462 |
| 0.6 | 1.210021 | 1.225756 | 1.241091 | 1.256044 | 1.270635 | 1.284881 | 1.298797 |
| 0.5 | 1.008189 | 1.021310 | 1.034096 | 1.046565 | 1.058730 | 1.070608 | 1.082210 |
| 0.4 | 0.806445 | 0.816948 | 0.827182 | 0.837161 | 0.846898 | 0.856404 | 0.865689 |
| 0.3 | 0.604772 | 0.612652 | 0.620330 | 0.627818 | 0.635123 | 0.642255 | 0.649221 |
| 0.2 | 0.403152 | 0.408407 | 0.413527 | 0.418520 | 0.423391 | 0.428147 | 0.432792 |
| 0.1 | 0.201567 | 0.204195 | 0.206755 | 0.209252 | 0.211688 | 0.214066 | 0.216389 |
| 0.0 | 0.000000 | 0.000000 | 0.000000 | 0.000000 | 0.000000 | 0.000000 | 0.000000 |

$v = \operatorname{arc} \Gamma(x+iy) = \Im\mathrm{m} \ln \Gamma(z)$

$\longrightarrow x$

| 9.4 | 9.6 | 9.8 | 10.0 | 10.2 | 10.4 | 10.6 | $y$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 23.452565 | 23.620118 | 23.785483 | 23.948703 | 24.109823 | 24.268882 | 24.425921 | 10.0 |
| 22.934831 | 23.100371 | 23.263721 | 23.424923 | 23.584022 | 23.741060 | 23.896079 | 9.8 |
| 22.419333 | 22.582816 | 22.744105 | 22.903246 | 23.060282 | 23.215257 | 23.368214 | 9.6 |
| 21.906075 | 22.067455 | 22.226638 | 22.383673 | 22.538603 | 22.691473 | 22.842327 | 9.4 |
| 21.395059 | 21.554288 | 21.711321 | 21.866203 | 22.018983 | 22.169705 | 22.318413 | 9.2 |
| 20.886288 | 21.043319 | 21.198152 | 21.350838 | 21.501422 | 21.649951 | 21.796470 | 9.0 |
| 20.379763 | 20.534545 | 20.687132 | 20.837572 | 20.985915 | 21.132206 | 21.276492 | 8.8 |
| 19.875484 | 20.027967 | 20.178258 | 20.326405 | 20.472459 | 20.616467 | 20.758476 | 8.6 |
| 19.373449 | 19.523582 | 19.671526 | 19.817331 | 19.961049 | 20.102727 | 20.242412 | 8.4 |
| 18.873656 | 19.021387 | 19.166932 | 19.310346 | 19.451678 | 19.590978 | 19.728294 | 8.2 |
| 18.376101 | 18.521375 | 18.664470 | 18.805441 | 18.944338 | 19.081213 | 19.216113 | 8.0 |
| 17.880779 | 18.023542 | 18.164133 | 18.302609 | 18.439021 | 18.573421 | 18.705858 | 7.8 |
| 17.387683 | 17.527878 | 17.665912 | 17.801841 | 17.935717 | 18.067592 | 18.197517 | 7.6 |
| 16.896804 | 17.034376 | 17.169797 | 17.303125 | 17.434412 | 17.563713 | 17.691077 | 7.4 |
| 16.408133 | 16.543023 | 16.675775 | 16.806447 | 16.935094 | 17.061769 | 17.186524 | 7.2 |
| 15.921658 | 16.053807 | 16.183834 | 16.311796 | 16.437748 | 16.561746 | 16.683841 | 7.0 |
| 15.437364 | 15.566713 | 15.693956 | 15.819152 | 15.942357 | 16.063626 | 16.183010 | 6.8 |
| 14.955236 | 15.081724 | 15.206126 | 15.328499 | 15.448902 | 15.567388 | 15.684011 | 6.6 |
| 14.475256 | 14.598822 | 14.720323 | 14.839817 | 14.957362 | 15.073014 | 15.186825 | 6.4 |
| 13.997403 | 14.117986 | 14.236526 | 14.353084 | 14.467716 | 14.580479 | 14.691427 | 6.2 |
| 13.521655 | 13.639193 | 13.754713 | 13.868275 | 13.979939 | 14.089760 | 14.197792 | 6.0 |
| 13.047988 | 13.162417 | 13.274855 | 13.385365 | 13.494004 | 13.600830 | 13.705894 | 5.8 |
| 12.576374 | 12.687630 | 12.796927 | 12.904325 | 13.009883 | 13.113659 | 13.215705 | 5.6 |
| 12.106783 | 12.214803 | 12.320896 | 12.425365 | 12.527546 | 12.628217 | 12.727192 | 5.4 |
| 11.639181 | 11.743901 | 11.846730 | 11.947730 | 12.046958 | 12.144471 | 12.240324 | 5.2 |
| 11.173534 | 11.274890 | 11.374393 | 11.472105 | 11.568085 | 11.662387 | 11.755065 | 5.0 |
| 10.709803 | 10.807731 | 10.903847 | 10.998214 | 11.090888 | 11.181925 | 11.271378 | 4.8 |
| 10.247946 | 10.342382 | 10.435051 | 10.526014 | 10.615327 | 10.703047 | 10.789225 | 4.6 |
| 9.787919 | 9.878800 | 9.967961 | 10.055463 | 10.141361 | 10.225710 | 10.308562 | 4.4 |
| 9.329673 | 9.416937 | 9.502531 | 9.586514 | 9.668943 | 9.749870 | 9.829348 | 4.2 |
| 8.873159 | 8.956743 | 9.038710 | 9.119119 | 9.198025 | 9.275480 | 9.351534 | 4.0 |
| 8.418322 | 8.498165 | 8.576448 | 8.653228 | 8.728558 | 8.802491 | 8.875074 | 3.8 |
| 7.965103 | 8.041146 | 8.115688 | 8.188785 | 8.260489 | 8.330851 | 8.399917 | 3.6 |
| 7.513444 | 7.585628 | 7.656373 | 7.725734 | 7.793762 | 7.860506 | 7.926010 | 3.4 |
| 7.063279 | 7.131547 | 7.198442 | 7.264017 | 7.328320 | 7.391399 | 7.453297 | 3.2 |
| 6.614541 | 6.678838 | 6.741831 | 6.803570 | 6.864102 | 6.923472 | 6.981723 | 3.0 |
| 6.167161 | 6.227434 | 6.286474 | 6.344329 | 6.401045 | 6.456664 | 6.511228 | 2.8 |
| 5.721063 | 5.777261 | 5.832300 | 5.886227 | 5.939084 | 5.990912 | 6.041749 | 2.6 |
| 5.276172 | 5.328246 | 5.379240 | 5.429195 | 5.478152 | 5.526150 | 5.573225 | 2.4 |
| 4.832407 | 4.880313 | 4.927217 | 4.973160 | 5.018179 | 5.062311 | 5.105589 | 2.2 |
| 4.389686 | 4.433380 | 4.476155 | 4.518048 | 4.559093 | 4.599326 | 4.638775 | 2.0 |
| 4.168690 | 4.210263 | 4.250960 | 4.290814 | 4.329860 | 4.368131 | 4.405655 | 1.9 |
| 3.947925 | 3.987366 | 4.025975 | 4.063782 | 4.100821 | 4.137123 | 4.172714 | 1.8 |
| 3.727374 | 3.764678 | 3.801190 | 3.836942 | 3.871967 | 3.906292 | 3.939944 | 1.7 |
| 3.507032 | 3.542187 | 3.576594 | 3.610285 | 3.643287 | 3.675629 | 3.707336 | 1.6 |
| 3.286884 | 3.319883 | 3.352178 | 3.383799 | 3.414772 | 3.445125 | 3.474880 | 1.5 |
| 3.066920 | 3.097755 | 3.127931 | 3.157475 | 3.186413 | 3.214770 | 3.242567 | 1.4 |
| 2.847128 | 2.875791 | 2.903841 | 2.931302 | 2.958199 | 2.984554 | 3.010389 | 1.3 |
| 2.627496 | 2.653982 | 2.679898 | 2.705270 | 2.730121 | 2.754469 | 2.778337 | 1.2 |
| 2.408013 | 2.432313 | 2.456093 | 2.479369 | 2.502167 | 2.524504 | 2.546399 | 1.1 |
| 2.188666 | 2.210776 | 2.232410 | 2.253588 | 2.274329 | 2.294650 | 2.314568 | 1.0 |
| 1.969443 | 1.989357 | 2.008842 | 2.027916 | 2.046596 | 2.064897 | 2.082834 | 0.9 |
| 1.750332 | 1.768046 | 1.785378 | 1.802343 | 1.818957 | 1.835234 | 1.851187 | 0.8 |
| 1.531321 | 1.546831 | 1.562005 | 1.576857 | 1.591403 | 1.605652 | 1.619618 | 0.7 |
| 1.312398 | 1.325699 | 1.338712 | 1.351449 | 1.363922 | 1.376141 | 1.388118 | 0.6 |
| 1.093550 | 1.104639 | 1.115488 | 1.126106 | 1.136505 | 1.146691 | 1.156675 | 0.5 |
| 0.874765 | 0.883639 | 0.892321 | 0.900819 | 0.909140 | 0.917292 | 0.925282 | 0.4 |
| 0.656029 | 0.662687 | 0.669200 | 0.675576 | 0.681818 | 0.687933 | 0.693927 | 0.3 |
| 0.437332 | 0.441771 | 0.446114 | 0.450365 | 0.454528 | 0.458605 | 0.462602 | 0.2 |
| 0.218660 | 0.220880 | 0.223051 | 0.225177 | 0.227259 | 0.229298 | 0.231296 | 0.1 |
| 0.000000 | 0.000000 | 0.000000 | 0.000000 | 0.000000 | 0.000000 | 0.000000 | 0.0 |

# 公　式　集

(例えば [§22] は §22 にその公式が導かれていることを意味する.)

**1.** ガンマ函數 $\Gamma(z)$ は $z=-l$ $(l=0,1,2,\cdots\cdots)$ に一位の極をもち，そこに於ける留數が $\dfrac{(-1)^l}{l!}$ なる $z$ の全有限平面で有理型な函數で，次の三つの條件を滿足する全有限平面で有理型な函數として一義的に決定される [§22].

$$\begin{cases}\Gamma(z+1)=z\Gamma(z), \quad \Gamma(1)=1, \\ \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\Gamma(z+n)}{\Gamma(n)n^z}=1\ .\end{cases}$$

この條件は次の實函數の條件でおきかえられる [§29].

$$\begin{cases}\Gamma(x) \text{ は } x>0 \text{ に對し實正數で } \Gamma(1)=1, \\ \Gamma(x+1)=x\Gamma(x), \\ \text{對數凸である.}\end{cases}$$

**2.** $\Gamma(z)$ の種々な表示.

$$\Gamma(z)=\int_0^\infty e^{-t}t^{z-1}dt=\int_0^1\left(\ln\frac{1}{t}\right)^{z-1}dt \qquad (\Re z>0). \qquad [\S 19]$$

$$\Gamma(z)=\frac{1}{e^{2\pi iz}-1}\int_{+\infty}^{(0+)}e^{-t}t^{z-1}dt=\int_0^\infty\left[e^{-t}-\sum_{l=0}^{n}\frac{(-t)^l}{l!}\right]t^{z-1}dt,$$

ここに $n$ は $-n-1<\Re z<-n$ なる負でない整數.

$z$ の任意の値に對して

$$\Gamma(z)=-\frac{1}{2i\sin\pi z}\int_{+\infty}^{(0+)}e^{-t}(-t)^{z-1}dt \qquad [\S 23]$$

$$=\int_1^\infty e^{-t}t^{z-1}dt+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!(z+n)}.$$

$$\frac{1}{\Gamma(z)}=\frac{i}{2\pi}\int_{+\infty}^{(0+)}e^{-t}(-t)^{-z}dt \qquad [\S 23]$$

$$=z\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-z}$$

$$=z\lim_{n\to\infty}\frac{(z+1)(z+2)\cdots\cdots(z+n-1)}{1.2\cdots\cdots(n-1)}n^{-z}.$$

$$\sqrt{\pi}\Big/\Gamma\left(1+\frac{z}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1-z}{2}\right)=\left(1-z\right)\left(1+\frac{z}{2}\right)\left(1-\frac{z}{3}\right)\left(1+\frac{z}{4}\right)\cdots\cdots.$$

$$\frac{1}{\Gamma(z)}=ze^{Cz}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)e^{-\frac{z}{n}}$$ [§ 22]

ここに
$$C=\text{Euler の常数}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots\cdots+\frac{1}{n}-\ln n\right)$$
$$=0.57721\ 56649\cdots\cdots$$ [§ 21]

$$\sin\pi z=\pi z\prod_{n=-\infty}^{\infty}{}'\left(1+\frac{z}{n}\right)e^{-\frac{z}{n}}=\pi z\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{n^2}\right)$$ [§ 14]

$$\cos\pi z=\prod_{n=-\infty}^{\infty}\left(1+\frac{2z}{2n+1}\right)e^{-\frac{2z}{2n+1}}=\prod_{n=0}^{\infty}\left(1-\frac{4z^2}{(2n+1)^2}\right)$$ [§ 14]

$$\frac{\Gamma(x+iy)}{\Gamma(y)}=e^{-iCy}\frac{x}{x+iy}\prod_{n=1}^{\infty}\left[\frac{e^{iy/n}}{1+\dfrac{iy}{x+n}}\right],\ (x,y\ \text{實};\ x>0).$$

**3.** Gauss の函數
$$\Psi(z)=\frac{d\ln\Gamma(z)}{dz}=\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}.$$ [§ 24]

これは條件

$$\begin{cases}\Psi(z+1)-\Psi(z)=\dfrac{1}{z},\\ \Psi(1)=-C,\\ \lim\limits_{n\to\infty}[\Psi(z+n)-\Psi(n+1)]=0,\end{cases}$$

あるいは

$$\begin{cases}\Psi(z+1)-\Psi(z)=\dfrac{1}{z},\\ \lim\limits_{n\to\infty}[\Psi(z+n)-\ln n]=0\end{cases}$$

を滿たす全有限平面で有理型な函數として一義的に決定される．

$$\frac{d\Psi(z)}{dz}=\frac{d^2\ln\Gamma(z)}{dz^2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(z+n)^2},$$ [§ 24]

$$\Psi'(z+1)-\Psi'(z)=-\frac{1}{z^2}.$$

**4.** $\Psi(z)$ 及び $C$ の種々な表示．

$$\Psi(z)=-C-\frac{1}{z}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{n}-\frac{1}{n+z}\right]=-C+\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{z+n}\right)$$ [§ 24]

$$=\ln z-\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{1}{z+n}-\ln\left(1+\frac{1}{z+n}\right)\right].$$

$$\pi\cot\pi z=\frac{1}{z}+\sum_{n=-\infty}^{\infty}{}'\left(\frac{1}{z+n}-\frac{1}{n}\right).$$ [§ 13]

$$\Psi(z)=\int_0^\infty\left[\frac{e^{-t}}{t}-\frac{e^{-zt}}{1-e^{-t}}\right]dt \qquad [§\,24]$$

$$=\int_0^\infty\left[e^{-t}-\frac{1}{(1+t)^z}\right]\frac{dt}{t} \qquad [§\,24]$$

$$=\int_0^1\left[\frac{-1}{\ln t}-\frac{t^{z-1}}{1-t}\right]dt$$

$$=-C+\int_0^1\frac{1-t^{z-1}}{1-t}dt.$$

$$\ln z=\int_0^\infty\frac{e^{-t}-e^{-zt}}{t}dt \qquad (\Re z>0). \qquad [§\,7]$$

$$1+\frac{1}{2}+\cdots\cdots+\frac{1}{n}=\int_0^\infty\frac{1-e^{-nt}}{e^t-1}dt. \qquad [§\,21]$$

$$C=\int_0^\infty\left(\frac{1}{e^t-1}-\frac{e^{-t}}{t}\right)dt \qquad [§\,21]$$

$$=\int_0^1(1-e^{-t})\frac{dt}{t}-\int_1^\infty e^{-t}\frac{dt}{t}=\int_0^1\left[1-e^{-t}-e^{-\frac{1}{t}}\right]\frac{dt}{t}=\int_0^\infty\left[\frac{1}{1+t}-e^{-t}\right]\frac{dt}{t}.$$

**5.　恒等關係.**

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z)=\frac{\pi}{\sin\pi z}\ (\text{相補定理});\ \Gamma\left(\frac{1}{2}+z\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}-z\right)=\frac{\pi}{\cos\pi z}, \qquad [§\,22]$$

$$\frac{\Gamma(x+iy)\,\Gamma(x-iy)}{\Gamma^2(x)}=\left|\frac{\Gamma(x+iy)}{\Gamma(x)}\right|^2=\prod_{n=0}^\infty\left[\frac{1}{1+\frac{y^2}{(x+n)^2}}\right] \quad (x,y\ \text{實};\ x>0),$$

$$\Gamma(1+yi)\Gamma(1-yi)=|\Gamma(1+yi)|^2=\frac{\pi y}{\sinh\pi y}, \qquad [§\,22]$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}+yi\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}-yi\right)=\left|\Gamma\left(\frac{1}{2}+yi\right)\right|^2=\frac{\pi}{\cosh\pi y}. \qquad [§\,22]$$

$$\Psi(z)-\Psi(1-z)=-\pi\cot\pi z \quad (\Psi\text{の相補定理}). \qquad [§\,32]$$

$$\Psi\left(\frac{1}{2}+z\right)-\Psi\left(\frac{1}{2}-z\right)=\pi\tan\pi z.$$

$$\Gamma(z)\Gamma\left(z+\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(z+\frac{2}{n}\right)\cdots\cdot\Gamma\left(z+\frac{n-1}{n}\right)=(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}n^{\frac{1}{2}-nz}\,\Gamma(nz), \quad (\text{乘法定理}) \qquad [§\,26]$$

$$\Gamma(2z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot 2^{-\frac{1}{2}}\,2^{2z}\Gamma(z)\Gamma\left(z+\frac{1}{2}\right), \quad (2\text{倍公式}) \qquad [§\,26]$$

$$\Gamma(3z)=\frac{1}{2\pi}\cdot 3^{-\frac{1}{2}}\,3^{3z}\,\Gamma(z)\Gamma\left(z+\frac{1}{3}\right)\Gamma\left(z+\frac{2}{3}\right),$$

$$\Gamma(2z+1)=\frac{4^z}{\sqrt{\pi}}\,\Gamma\left(z+\frac{1}{2}\right)\Gamma(z+1), \qquad [§\,26]$$

$$\Gamma(z)=\frac{2^{z-1}}{\sqrt{\pi}}\,\Gamma\left(\frac{z}{2}\right)\Gamma\left(\frac{z+1}{2}\right). \qquad [§ 26]$$

$$\Gamma(1+z)=\frac{4^z}{\sqrt{\pi}}\prod_{n=1}^{\infty}\Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{z}{2^n}\right). \qquad [§ 26]$$

$$\frac{\Gamma(z)\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(z+\frac{1}{2}\right)}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n)\,!}{2^{2n}n\,!\,n\,!}\cdot\frac{1}{z+n}.$$

$$\frac{\Gamma(z)\Gamma(a+1)}{\Gamma(z+a)}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{a(a-1)(a-2)\cdots\cdots(a-n)}{n\,!}\cdot\frac{1}{z+n} \qquad (a>0).$$

$$\Psi(nz)=\frac{1}{n}\sum_{r=0}^{n-1}\Psi\left(z+\frac{r}{n}\right)+\ln n \quad (\Psi\ \text{の乗法定理}). \qquad [§ 26]$$

$$\Psi\left(\frac{z+1}{2}\right)-\Psi\left(\frac{z}{2}\right)=2\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-1)^r}{z+r}=2\int_0^{\infty}\frac{e^{-zt}}{1+e^{-t}}\,dt.$$

$$\Psi(z+n)=\Psi(z)+\frac{1}{z}+\frac{1}{z+1}+\cdots\cdots+\frac{1}{z+n-1},$$

$$\Psi(z-n)=\Psi(z)-\frac{1}{z-1}-\frac{1}{z-2}-\cdots\cdots-\frac{1}{z-n}.$$

**6. 特別な値**

$$\Gamma(1)=0\,!=1,\quad \Gamma(n+1)=n\,! \quad (n=0,1,2,\cdots\cdots). \qquad [§ 22]$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi},\quad \Gamma\left(-\frac{1}{2}\right)=-2\sqrt{\pi},\qquad \Gamma\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{\sqrt{\pi}}{2} \qquad [§ 22]$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}+n\right)=\frac{(2n)\,!}{4^n n\,!}\sqrt{\pi},\qquad \Gamma\left(\frac{1}{2}-n\right)=(-1)^n4^n\frac{n\,!}{(2n)\,!}\sqrt{\pi}. \qquad [§ 26]$$

$$\Psi(1)=\Gamma'(1)=-C,\qquad \Psi(n+1)=-C+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots\cdots+\frac{1}{n}. \qquad [§ 24]$$

$$\Psi\left(\frac{1}{2}-n\right)=\Psi\left(\frac{1}{2}+n\right)=\Psi\left(\frac{1}{2}\right)+2\left(1+\frac{1}{3}+\cdots\cdots+\frac{1}{2n-1}\right). \qquad [§ 32]$$

$$\Psi\left(\frac{1}{2}\right)=\Gamma'\left(\frac{1}{2}\right)\Big/\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=-C-2\ln 2=-1.96351\ 0026. \qquad [§ 32]$$

$$\Psi'(1)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}=1.64493\ 4067.$$

$$\Psi'(n)=\frac{\pi^2}{6}-\sum_{r=1}^{n-1}\frac{1}{r^2}. \qquad [§ 32]$$

$$\Psi'\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\pi^2}{2}=4.93480\ 2201.$$

$$\Psi'\left(\frac{1}{2}+n\right)=\frac{\pi^2}{2}-\sum_{r=1}^{n}\frac{4}{(2r-1)^2},\quad \Psi'\left(\frac{1}{2}-n\right)=\frac{\pi^2}{2}+\sum_{r=1}^{n}\frac{4}{(2r-1)^2}. \qquad [§ 32]$$

$$\lim_{n\to\infty}\Psi'\left(\frac{1}{2}+n\right)=0,\qquad \lim_{n\to\infty}\Psi'\left(\frac{1}{2}-n\right)=\pi^2.$$

**7.** $|z|\to\infty$ に對する $\ln\Gamma(z)$ の漸近公式

$\Re z>0$ に對し $\ln\Gamma(z)=\beta(z)+\int_0^\infty\left(\frac{1}{e^t-1}+\frac{1}{2}-\frac{1}{t}\right)\frac{e^{-zt}}{t}dt$　[§ 25]

$$=\beta(z)+2\int_0^\infty\frac{\tan^{-1}(t/z)}{e^{2\pi t}-1}dt \qquad [\S\,25]$$

$$=\beta(z)-\int_0^\infty\frac{\overline{B}_1(t)}{t+z}dt \qquad [\S\,28]$$

ここに

$$\beta(z)\equiv\left(z-\frac{1}{2}\right)\ln z-z+\frac{1}{2}\ln 2\pi,$$

$\overline{B}_1(t)$ は 1 次の週期的 Bernoulli 函數. $\ln\Gamma(z)-\beta(z)\equiv\mu(z)$ は Binet の函數と呼ばれている.

$|\arc z|<\pi$ で $|z|\to\infty$ のとき

$$\ln\Gamma(z)\sim\beta(z)+\sum_{r=1}^{\infty}\frac{B_{2r}}{(2r-1)2rz^{2r-1}} \qquad [\S\,27,28,29]$$

$$=\beta(z)+\frac{1}{12z}-\frac{1}{360z^3}+\frac{1}{1260z^5}-\cdots.$$

こゝに　$B_2=\frac{1}{6}$, $B_4=-\frac{1}{30}$, $B_6=\frac{1}{42}$, $B_8=-\frac{1}{30}\cdots$, は Bernoulli 數. また

$$\ln\Gamma(z)=\beta(z)+\sum_{r=1}^{N}\frac{B_{2r}}{(2r-1)2rz^{2r-1}}+R_N(z),\quad z=\rho e^{i\theta}$$

とおけば

$$|R_N(z)|\leq\frac{|B_{2N+2}|}{(2N+1)(2N+2)|z|^{2N+1}\left(\cos\frac{\theta}{2}\right)^{2N+2}}. \qquad [\S\,28]$$

$$\ln\Gamma(z)\sim\beta(z)+\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2.3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(z+n)^2}+\frac{2}{3.4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(z+n)^3}+\frac{3}{4.5}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(z+n)^4}+\cdots\right].$$

**8.** $|z|\to\infty$ に對する $\Gamma(z)$ の漸近公式.

$|\arc z|<\pi$ で $|z|\to\infty$ のとき

$$\Gamma(z)\sim\sqrt{2\pi}z^{z-\frac{1}{2}}e^{-z}\left\{1+\frac{1}{12z}+\frac{1}{288z^2}-\frac{139}{51840z^3}+\cdots\right\}. \qquad [\S\,27,30]$$

$$\Gamma\left(z+\frac{1}{2}\right)=\sqrt{2\pi}z^ze^{-z}e^{-\mu(z)+\mu(2z)},$$

ここに　$-\mu(z)+\mu(2z)\sim-\frac{1}{24z}+\frac{7}{2880z^3}-\frac{31}{40320z^5}+\cdots$　[§ 27]

任意の $a$ に對し

$$\lim_{|z|\to\infty}\frac{\Gamma(z+a)}{\Gamma(z)}e^{-a\ln z}=1.$$

$|x|$ 有限，$|y|\to\infty$ のとき

$$|\Gamma(x+iy)|\sim\sqrt{2\pi}|y|^{x-\frac{1}{2}}e^{-\frac{\pi}{2}|y|}\ . \qquad [§ 30]$$

**9.** $|z|<1$ に對して

$$\ln\Gamma(z+1)=-Cz+\frac{S(2)}{2}z^2-\frac{S(3)}{3}z^3+\cdots\cdot \qquad [§ 31]$$

$$=-\frac{1}{2}\left[\ln\frac{\sin\pi z}{\pi z}+\ln\frac{1+z}{1-z}\right]+(1-C)z-\sum_{r=1}^{\infty}\frac{S(2r+1)-1}{2r+1}z^{2r+1}\ .$$

$$\ln\Gamma\left(z+\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}\ln\pi-\frac{1}{2}\left[\ln\cos\pi z+\ln\frac{1+2z}{1-2z}\right]+\Psi\left(\frac{3}{2}\right)z-\sum_{r=1}^{\infty}b_{2r+1}(2z)^{2r+1}, \qquad [§ 31]$$

ここに

$$S(n)\equiv\zeta(n)=1+\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}+\cdots\cdot,$$

$$b_{2r+1}=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{(2r+1)(2m+1)^{2r+1}}.$$

$$\Gamma(z+1)=\sqrt{\frac{\pi z}{\sin\pi z}\,\frac{1-z}{1+z}}\cdot e^{\Lambda},$$

ここに

$$\Lambda=c_1z-c_3z^3-c_5z^5-\cdots\cdot,$$

| | |
|---|---|
| $c_1=0.42278\ 4335$ | $c_7=0.00119\ 2754$ |
| $c_3=0.06735\ 3011$ | $c_9=0.00022\ 3155$ |
| $c_5=0.00738\ 5551$ | $c_{11}=0.00004\ 4926.$ |

**10.** ガンマ函數で表わされる定積分

$$\int_0^\infty e^{-at}t^{z-1}dt=\frac{\Gamma(z)}{a^z} \qquad (\Re z>0,\ \Re a>0).$$

ベータ函數

$$B(x,y)=\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt, \qquad (\Re x>0,\ \Re y>0)$$

$$=\frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}=B(y,x).$$

$$B(x,y)B(x+y,z)=B(y,z)B(y+z,x).$$

$n,m=1,2,3,\cdots\cdot$ に對し

$$\frac{1}{B(n,m)}=m\binom{n+m-1}{n-1}=n\binom{n+m-1}{m-1}.$$

$$\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\frac{dt}{(t+p)^{x+y}}=\frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}\frac{1}{(1+p)^x p^y}$$

$$(\Re x>0,\ \Re y>0\ ;\ p>0).$$

$$\int_0^\infty \frac{t^x}{(1+t)^{1+y}}\,dt=\frac{\Gamma(x+1)\Gamma(y-x)}{\Gamma(y+1)}$$

$$(\Re y>\Re x>-1).$$

$$\int_0^\infty \frac{t^x}{(1+t^z)^{1+y}}\,dt=\frac{1}{z}\frac{\Gamma\left(\frac{x+1}{z}\right)\Gamma\left(y-\frac{x-z+1}{z}\right)}{\Gamma(y+1)}$$

$$(\Re z>0\ ;\ \Re y>\Re\frac{x-z+1}{z}\ ;\ \Re x>-1;\ \Re y>-1).$$

$$\int_0^1 t^{x-1}(1-t^z)^{y-1}\,dt=\frac{1}{z}\frac{\Gamma\left(\frac{x}{z}\right)\Gamma(y)}{\Gamma\left(\frac{x}{z}+y\right)}$$

$$(\Re z>0,\ \Re\frac{x}{z}>0,\ \Re y>0).$$

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{e^{ixy}}{(a+iy)^\nu}\,dy=\begin{cases}\dfrac{2\pi x^{\nu-1}e^{-ax}}{\Gamma(\nu)}, & x>0\\ 0, & x<0,\end{cases}$$

$$\left(x, a\ 實,\ a>0,\ \Re\nu>0,\ -\frac{\pi}{2}<\operatorname{arc}(a+iy)<\frac{\pi}{2}\right).$$

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{dt}{(a+it)^x(b-it)^y}=2\pi(a+b)^{1-x-y}\frac{\Gamma(x+y-1)}{\Gamma(x)\Gamma(y)},$$

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{dt}{(a-it)^x(b-it)^y}=0,$$

$$(a, b>0,\ x, y\ 實,\ x+y>1).$$

$$\int_0^\infty e^{-at^x}t^y\,dt=\frac{1}{y+1}\frac{\Gamma\left(\frac{x+y+1}{x}\right)}{a^{(y+1)/x}},$$

$$(\Re a>0,\ \Re x>0,\ \Re y>-1).$$

$$\int_{-1}^1 \frac{(1+t)^{2x-1}(1-t)^{2y-1}}{(1+t^2)^{x+y}}\,dt=2^{x+y-2}\frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)},$$

$$(\Re x>0,\ \Re y>0).$$

$$\int_0^1 (1-t^x)^{-1/y}\,dt=\frac{\Gamma\left(\frac{1+x}{x}\right)\Gamma\left(\frac{y-1}{y}\right)}{\Gamma\left(1+\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right)},$$

$(x, y$ 實, $x>0,\ y>1)$.

$$\int_b^a (a-t)^{x-1}(t-b)^{y-1}dt=(a-b)^{x+y-1}\frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)},$$

$(a, b$ 實, $0<b<a;\ \Re x>0,\ \Re y>0)$.

$$\int_b^a \frac{(a-t)^{x-1}(t-b)^{y-1}}{|t-c|^{x+y}}dt=\frac{(a-b)^{x+y-1}}{|a-c|^y|b-c|^x}\frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)},$$

$(a, b, c$ 實, $0<c<b<a$ 又は $0<b<a<c,\ \Re x>0,\ \Re y>0)$.

$$\int_0^{\pi/2}\sin^{2x}\varphi\cos^{2y}\varphi d\varphi=\frac{\pi}{2^{2x+2y+1}}\frac{\Gamma(2x+1)\Gamma(2y+1)}{\Gamma(x+1)\Gamma(y+1)\Gamma(x+y+1)}$$

$$=\frac{\Gamma\left(x+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(y+\frac{1}{2}\right)}{2\Gamma(x+y+1)}$$

$\left(\Re x>-\frac{1}{2},\ \Re y>-\frac{1}{2}\right)$.

$$\int_0^{\pi/2}\cos^x t\cos yt dt=\frac{\pi}{2^{x+1}}\frac{\Gamma(x+1)}{\Gamma\left(\frac{x+y}{2}+1\right)\Gamma\left(\frac{x-y}{2}+1\right)},$$

$(\Re x>1)$.

$$\int_0^{\pi}\sin^x t\, e^{iyt}dt=\frac{\pi}{2^x}\frac{\Gamma(x+1)}{\Gamma\left(1+\frac{x+y}{2}\right)\Gamma\left(1+\frac{x-y}{2}\right)}e^{i\pi y/2}$$

$(\Re x>-1)$.

$$\int_0^{\pi/2}\sin^{x-1}t\cos^{y-1}t\, e^{i(x+y)t}dt=\frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}e^{i\pi x/2}.$$

$$\int_0^{\pi/2}\frac{\cos^{2x-1}t\sin^{2y-1}t}{(p\cos^2 t+q\sin^2 t)^{x+y}}dt=\frac{1}{2p^xq^y}\frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)},$$

$(p, q$ 實 $>0;\ \Re x>0,\ \Re y>0)$.

$$\int_0^{\infty}t^{y-1}e^{-xt\cos\beta}e^{ixt\sin\beta}dt=x^{-y}\Gamma(y)e^{i\beta y}$$

$\left(x, y, \beta\right.$ 實, $\left. x, y>0,\ |\beta|<\frac{\pi}{2}\right)$.

$$\int_0^{\infty}\frac{e^{-zt}}{\cosh t}dt=\frac{1}{2}\left[\Psi\left(\frac{z+3}{4}\right)-\Psi\left(\frac{z+1}{4}\right)\right], (\Re z>0).$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{iyt}}{\cosh^x(\beta t+\gamma)}dt=\frac{2^{x-1}}{\beta}e^{-iy\gamma/\beta}\frac{\Gamma\left(\frac{x}{2}+\frac{iy}{2\beta}\right)\Gamma\left(\frac{x}{2}-\frac{iy}{2\beta}\right)}{\Gamma(x)},$$

$(y, \beta, \gamma$ 實, $\beta>0,\ \Re x>0)$.

$$\int_0^\infty \frac{\sin xt}{t^y}\,dt=\frac{\Gamma(1-y)}{x^{1-y}}\cos\frac{\pi y}{2},$$

($x, y$ 實$>0$；$0<y<2$).

$$\int_0^\infty \frac{\cos xt}{t^y}\,dt=\frac{\Gamma(1-y)}{x^{1-y}}\sin\frac{\pi y}{2}$$

($x, y$ 實 $>0$；$0<y<1$).

$$\int_0^\infty \frac{\cosh(2yt)}{(\cosh t)^{2x}}\,dt=2^{2x-2}\frac{\Gamma(x+y)\Gamma(x-y)}{\Gamma(2x)}$$

($\Re x>|\Re y|$；$\Re x>0$).

$$\int_0^{\pi/2}\sin^{3/2}t\,dt=\int_0^{\pi/2}\cos^{3/2}t\,dt=\frac{1}{6\sqrt{2\pi}}\Gamma\left(\frac{1}{4}\right).$$

$$\int_0^1\frac{dt}{\sqrt{1-t^3}}=\frac{1}{2\pi 3^{\frac{1}{2}}2^{\frac{1}{3}}}\Gamma^2\left(\frac{1}{3}\right);\quad \int_0^1\frac{t\,dt}{\sqrt{1-t^3}}=\frac{\sqrt{3}}{\pi 2^{\frac{2}{3}}}\Gamma^2\left(\frac{2}{3}\right).$$

$$\int_0^1\frac{dt}{\sqrt{1-t^4}}=\frac{1}{4\sqrt{2\pi}}\Gamma^2\left(\frac{1}{4}\right).$$

$$\int_0^1\frac{t^{x-1}}{1+t}\,dt=\frac{1}{2}\left[\Psi\left(\frac{1+x}{2}\right)-\Psi\left(\frac{x}{2}\right)\right]\quad(\Re x>0),$$

$$\int_0^1\frac{t^{x-1}(1-t^y)}{1-t}\,dt=\Psi(x+y)-\Psi(x),$$

($\Re(x+y)>0$,　$\Re x>0$).

$$\int_0^1\frac{t^x-t^y}{t(1-t)}\,dt=\Psi(y)-\Psi(x),$$

($\Re x>0$,　$\Re y>0$).

# 索　　引

## ア


アダマール　Hadamard, J. ………………… 29
　整函數の無限積分解に關する定理 ………… 29
アルチン　Artin, E. ……………………… 76
鞍部點　saddle point, Sattelpunkt ………… 42


## イ


位數（整函數の）order …………………… 28
イヴェルゼン　Iversen, F.
　——の定理 ……………………………36, 37


## ウ


浮出し　Relief …………………………… 41


## エ


エムデ　Emde, F. ………………………… 43
圓射線の網目　Kreis-Strahlen-Netz ………… 41


## オ


オイラ　Euler, L.
　——の三角函數に關する公式 ………………3, 66
　——のガンマ函數の積表示に關する公式 …… 53
　——の第一種の積分（ベータ函數） ………… 109
　——の第二種の積分（ガンマ函數） ………… 45
　——の常數 $C$ ……………………………49, 58
Euler-Maclaurin の積分公式 ………………50. 69
オスグッド　Osgood, W.F. ………………… 126
オストロウスキー　Ostrowski, A. ………… 54


## カ


階乘　factorial
　$n$! の見積り …………………………… 16
　$n$! の補間 ……………………………… 44
ガウス　Gauss, Carl F.
　——の積分公式 ………………………… 93
　——の $\Psi$ 函數 ………………………… 57
　——の $\Psi(z)$ の積分表示式 ………………… 59
　——の $\Psi(z)$ の正根の計算 ………………… 89
　——の $\log \Pi(x)$ と $\Psi(x+1)$ の表 …………85, 90
　——の超幾何級數の公式 ………………… 108
加法定理　addition theorem
　指數函數の—— ………………………… 2
　三角函數の—— ………………………… 3
　双曲線函數の—— ……………………… 4
ガンマ函數　Gamma function
　——の歴史 ……………………………… 44
　——の正則性 …………………………… 45
　——の無限積表示 ………………………46, 52
　——の極限條件 ………………………… 54
　——の相補定理 ………………………… 55
　——の Hankel の積分表示 ……………… 55
　——の乘法定理 ………………………… 66
　——の漸近公式 …………………………71, 79
　——の基本領域 ………………………… 98
　——による等角寫像 …………………… 99
　——の浮出し …………………………… 100
　——で表わされる積分 ………………… 105
　實ガンマ函數の數値計算 ………………… 75, 85
　複素ガンマ函數の數値計算 ……………… 91
　逆ガンマ函數 …………………………… 100


## キ


基準積　canonical product ………………… 29
基本領域　fundamental region ………11, 32, 38, 98
逆函數
　——の要素 ……………………………… 33
　——の Riemann 面 ……………………10, 31
逆ガンマ函數
　——の代數分岐點 ……………………… 100
　——の超越特異點 ……………………… 101
境界點（到達可能な）boundary point (accessible) 36
極　pole ……………………………18, 22, 34
虚線　imaginary line ……………………… 41
ギルバート　Gilbert, Ph. ………………… 72
ギンツェル　Ginzel, I. …………………… 100

ク

クナル Knar, J. ………………………… 67
クライン Klein, F. ………………………… 38

コ

廣義一様收斂 ………………………… 24, 123
交叉點 Kreuzungspunkt ………………… 30, 42, 100
コーシー Cauchy の積分定理 ………… 105, 117, 122
ゴールドバッハ Goldbach ………………… 44
コプソン Copson, E.T. ………………… 82
弧立特異點 isolated singular point ………… 34, 35

サ

三角函數 trigonometric function ………… 2
sin $z$, cos $z$ ………………………… 2, 43
tan $z$, cot $z$ ………………………… 18
ザルツェル Salzer, H.E.
——の複素直坐標式補間法 ………… 95, 96

シ

週期 period ………………………… 4, 6
週間函數 ………………………… 5
基本週期 ………………………… 7, 18
主値 principal value
對數函數の—— ………………… 8, 9, 12
$\tan^{-1} u$ の—— ………………… 19
$\tanh^{-1} u$ の—— ………………… 20
$z^{a}$ の—— ………………………… 32
種數 genus (整函數の) ………………… 29
主要領域 Hauptbereich ………………… 65
集積値集合 cluster set ………………… 34
一價解析函數に關する —— ………… 34
多價解析函數に關する —— ………… 35
指數函數 exponential function ………… 1, 8
實線 real line ………………………… 41
實なる解析函數 real analytic function
實三角函數 ………………………… 4
實ガンマ函數 ………………………… 75
實プサイ函數 ………………………… 87
乘法定理 multiplication theorem
ガンマ函數の—— ………………… 66
プサイ函數の—— ………………… 65
ジリクレ Dirichlet, P.G. Legeune
——の $\Psi(z)$ の積分表示 ………… 59
振動路 oscillatory path ………………… 36, 101
眞性特異點 essentially singular point ……19, 34

ス

スターリング Stirling, James
——の漸近表示 ………………………… 62
——の級數 ………………………… 71, 93, 94
スティルチェス Stieltjs, T.J. ………… 62, 72

セ

正則函數 regular function ………………… 122
整函數 integral function
——の無限積表示 ………………… 26, 46
——の位數 order ………………………… 28
有限位數の—— ………………………… 28
——の零點の收斂指數 exponent of convergence of the zero ………………… 28
——の種數 genus ………………………… 29
——の逆函數の超超特異點 ………………… 36
ゼルベルグ Selberg, A, ………………… 113
漸近値 asymptotic value ………………… 36, 101
漸近路 asymptotic path ………………… 36, 101
漸近級數 asymptotic series ……………… 71, 80
線狀複體 linear complex ………………… 11

ソ

双曲線函數 hyperbolic function ………… 3
sinh $z$, cosh $z$ ………………………… 4
tanh $z$, coth $z$ ………………………… 18
相補定理 complementary theorem
ガンマ函數の—— ………………………… 55
プサイ函數の—— ………………………… 88

タ

對數函數 logarithmic function ………… 7
——の計算 ………………………… 13
自然對數 natural logarithm, ln $z$
常用對數 common logarithm, log $z$
對數分岐點 logarithmic branch point ……11, 37
對數凸 logarithmic convex ………………… 78

代數特異點 algebraic singular point··········35, 100
多價解析函數 many valued analytic function ··7, 35
無限多價函數 ························ 7
——の値 ························ 35
——の分枝 ························ 35
——の孤立特異點 ························ 35
——の特異點に於ける集積値集合 ··········· 35

チ

超越特異點 transcendental singular point ·· 35, 36
超幾何級數 hypergeometric series··········· 108
——の積分表示 ························ 114
——の Barnes による積分表示··········· 115
抽象的 Riemann 面························ 36

テ

ティチュマルシュ Titchmarsh, E.C. ········ 28
デーヴィス Davis, H.T. ···················· 85

ト

等角寫像 conformal representation ········30, 31
——に於ける特異點 ························ 30
等高線 level line, Höhenlinien ············41, 100
等高線流線の網目 Höhenlinien-Stromlinien-Netz ························41, 100
特異點 singular point
弧立—— ························34, 35
眞性—— ························34, 36
代數—— ························ 35
超越—— ························ 35
通性—— ························ 36
凸函數 convex function ··················· 76
對數凸 ························ 78
ドラヴァレプサン De la Vallée-Poussin
——の $\mu(t)$ 判定法 ························ 45

ニ

二項定理 Binomial theorem ··············· 32
ニールゼン Nielsen, N.····················· 62

ハ

$\pi$ の計算 ························ 21

ハウスドルフ Hausdorff, F. ··············· 54
バウシンガー Bauschinger, J. ············· 93
バーネス Barnes, E.W. ···················· 115
ハルトグ Hartog, ························ 110
ハンケル Hankel, H.
——のガンマ函數の積分表示 ···········55, 79, 82

ヒ

ピカール Picard, E.
——の定理 ························19, 34, 36
ビネー Binet, J.P.M.
——の第一の公式 (ln $\Gamma(z)$ の積分表示)······ 62
——の第二の公式 (同上)··················· 65
——の函數 ························65, 67
ピータース Peters, J.······················ 93
被覆面 covering surface ··················· 19
標準因數 primary factor ··················· 28

フ

複素直坐標式補間法 (Salzer) ··············95, 128
プサイ函數 ························ 57
——の極限條件 ························ 58
——の乗法定理 ························ 65
——の數値計算 ························ 87
——の零點 ························ 89
——の相補定理 ························ 88
部分分數分解 partial fraction decomposition
$\pi \cot \pi z$ の—— ························ 22
$\Psi(z)$ の—— ························ 58
プラナ Plana, G.A.A. ····················· 63
ブランディクール Brandicourt, ············ 94
プリングスハイム Pringsheim, A. ·········· 45
分岐點 branch point ······················ 31
分枝 branch ························9, 35

ヘ

冪 power ························ 32
ベータ函數 Beta function ················· 109
——の Pochhammer の積分表示··········· 113
ベッセル Bessel, F.W.
——の微分方程式 ························ 118
ヘルダー Hölder, O.······················· 54

ベルヌーイ Bernoulli, Jakob
——の數 ……25, 69, 73
——の多項式 ……69, 73
——の週期的函數 …… 73

ホ

ポアンカレ Poincaré, H.
ボーア Bohr, H. …… 76
Bohr-Mollerup の定理…… 78
ポホハンマ Pochhammer, L. …… 113
ボレル Borel, E. …… 125

マ

マチン Machin, J.…… 21

ミ

ミッタグレフラ Mittag-Leffler, M.G. …… 22
ムーア Moore …… 54
無限級數 infinite series…… 120
無限積 infinite product ……107, 126
無限積分 infinite integral …… 125

メ

メビウス Möbius, A.F. …… 19

モ

モレルップ Mollerup, J. …… 76

ユ

有理型函數 meromorphic function …… 18
——に關する Mittag-Leffler の定理 …… 22
——に關する Picard の定理 …… 19
——の孤立特異點 …… 33

ラ

ラグランジュ Lagrange, J.L.
——の補間公式 ……95, 96

リ

リーマン Riemann, B.
——面 ……10, 31, 37
抽象的 Riemann 面…… 36
流線 stream line, Stromlinien ……41, 100
領域 domain…… 122

ル

ルジャンドル Legendre, A.M. ……45, 67, 85, 86
——の二倍公式 duplication formula …… 67
——の $\log\Gamma(x)$ の表 …… 85
ルシルへ Roussilhe …… 94

レ

零點 zero point, Nullpunkt
實三角函數の—— …… 4
$\tan z$, $\tanh z$ の—— …… 18
單純な—— …… 30
$k$ 重の—— …… 30
ブサイ函數の—— …… 89
レンゼ Lense, J.…… 100

ロ

ロワン Lowan, A.N.…… 95

ワ

ワイエルシュトラス, Weierstrass, Karl T.W.
正則函數項の級數に關する定理 ……24, 27, 123
二重級數定理 Doppelreihensatz ……25, 125
整函數に關する定理 ……28, 53
一價解析函數の眞性特異點に關する ……34, 36
ワットソン Watson, G.N.
——の補助定理 …… 80
ワリス Wallis, John
——の公式 …… 27

ガンマ函數の理論と應用

1952年12月15日　第1刷發行　　¥ 680

著　者　柴垣和三雄

東京都千代田區神田一ツ橋2ノ3
發行者　岩波雄二郎

東京都品川區大井寺下町 1430
印刷者　小田茂作

發行所　東京都千代田區神田一ツ橋2ノ3　株式會社　岩波書店

落丁本・亂丁本はお取替いたします　　東日本印刷・桂川製本

## 岩波書店刊行

| | | | |
|---|---|---|---|
| 現代數學叢書 | 位相群論 | 淡中忠郎著 | B5判 140頁 定價 160圓 |
| 現代數學叢書 | 双對原理 | 淡中忠郎著 | B5判 136頁 定價 320圓 |
| 現代數學叢書 | 次元論 | 森田紀一著 | B5判 170頁 定價 300圓 |
| 現代數學叢書 | 代數函數の代數的理論 | 稻葉榮次著 | B5判 132頁 定價 220圓 |
| 現代數學叢書 | 點集合論 | 稻垣 武著 | B5判 260頁 定價 480圓 |
| 現代數學叢書 | 連續幾何學 | 前田文友著 | B5判 234頁 定價 600圓 |
| 現代數學 4 | 代數學 I | 正田建次郎 淺野啓三 著 | A5判 216頁 定價 450圓 |
| 現代數學 8 | 位相解析 I | 吉田耕作著 | A5判 348頁 定價 680圓 |
| 現代數學 11 | 代數函數論 | 岩澤健吉著 | A5判 362頁 定價 700圓 |